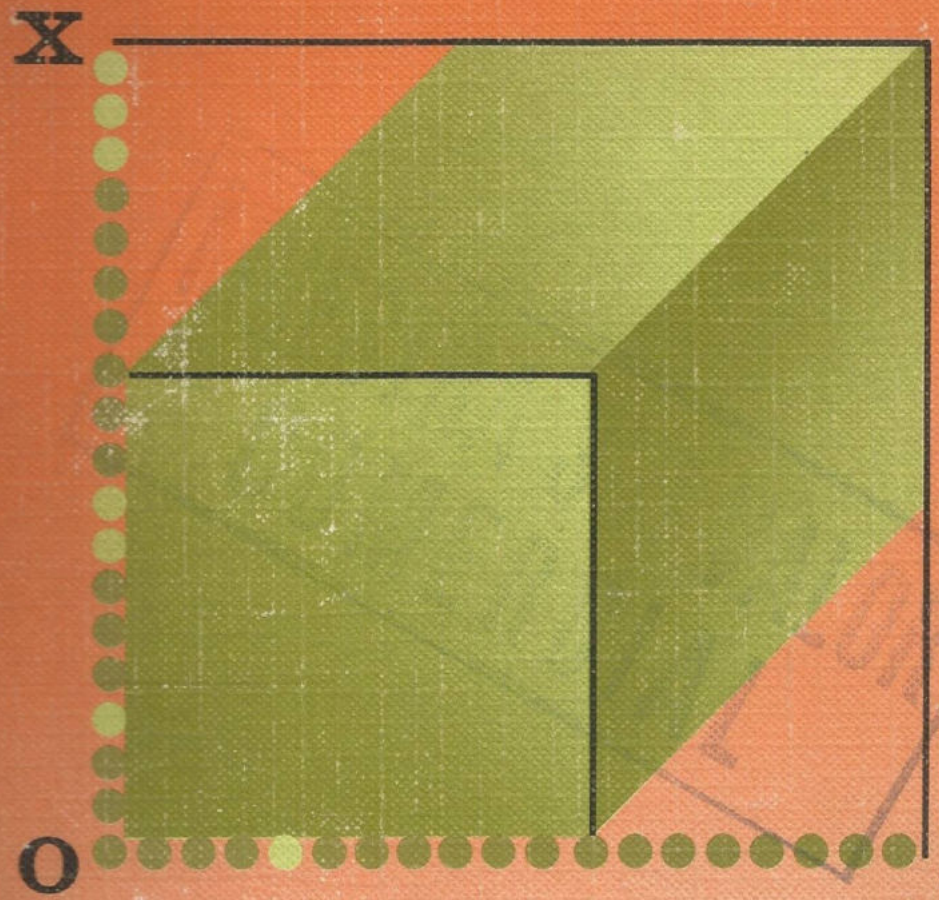


MATEMÁTICA

J. Gil Martos - M. Rivera - C. Vázquez

COU santillana

MATEMATICA

MATEMÁTICA

José Caruncho
Doctor en Matemáticas. Profesor de Universidad

José Gil
Licenciado en Matemáticas

Carmen Vázquez
Licenciada en Matemáticas. Profesora de Universidad

Miguel Rivera
Catedrático de Matemáticas del Instituto Nacional
de Bachillerato de Padrón (La Coruña)

COU
santillana

El material de las series EDUCACION SANTILLANA ha sido creado en el Departamento de Investigaciones Educativas de Santillana, S. A. de Ediciones, bajo la dirección de **Antonio Ramos.**

El libro de Matemáticas de C.O.U. ha sido programado y elaborado por:

José Caruncho

Doctor en Matemáticas. Profesor de Universidad.

José Gil

Licenciado en Matemáticas.

Carmen Vázquez

Licenciada en Matemáticas. Profesora de Universidad.

Miguel Rivera

Catedrático de Matemáticas del Instituto Nacional de Bachillerato de Padrón (La Coruña).

Dirección Editorial:

José Gil Martos.

PRÓLOGO

El Curso de Orientación Universitaria, al que va dirigido este libro, es un curso puente entre el Bachillerato y los estudios universitarios. Este carácter del curso exige, por una parte, sintetizar y ordenar los conocimientos más importantes de los cursos anteriores y, por otra, preparar para los estudios universitarios. Hemos intentado dar respuesta a esta doble exigencia, por un lado, retomando los conceptos más importantes y fecundos del Bachillerato para consolidarlos y dotarlos de nuevas perspectivas y, por otro, desarrollando los cuestionarios del curso en un nivel universitario.

Para que el lector abarque el amplio espectro de aplicaciones de la teoría se dan más de 400 ejercicios y problemas resueltos y más de 900 propuestos.

En la primera Unidad, que se inicia con el estudio y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss, se aborda el estudio de los espacios vectoriales, las operaciones con matrices, rangos y determinantes, para terminar con la regla de Cramer y el teorema de Rouché.

El interés del estudio de los determinantes radica en que constituyen una herramienta que permite expresar ciertas relaciones de un modo conciso y claro; para su introducción hemos preferido seguir la definición clásica, evitando así el estudio de las aplicaciones multilineales.

A lo largo de la segunda Unidad, se utilizan constantemente los recursos algebraicos que se introdujeron en la primera; así las relaciones geométricas en los espacios afín y euclídeo se expresan y desarrollan empleando relaciones vectoriales. Esta dependencia entre las Unidades 1 y 2 exige que su estudio se haga siguiendo el orden natural. Sin embargo, las Unidades 3 y 4 son independientes de las dos primeras, por lo que su estudio puede abordarse cuando el profesor lo considere conveniente.

El estudio de los movimientos o isometrías en el espacio euclídeo, que pide el cuestionario oficial, va precedido de un tema dedicado a las mismas transformaciones en el plano euclídeo. Este modelo, más sencillo, prepara al alumno para abordar el estudio de los movimientos en el espacio tridimensional.

El cálculo diferencial, cuya parte central la constituyen las funciones derivables y la fórmula de Taylor, se inicia con un repaso y ampliación de los números reales y de las funciones continuas. La noción de derivada, aunque ya es conocida del bachillerato, es presentada de nuevo mediante los dos problemas que históricamente originaron este concepto. Se han incluido en esta parte muchos problemas que ordinariamente se estudian en los libros de Física, pero que, en realidad, son simples aplicaciones de la derivada.

El cálculo integral se inicia con el estudio de las primitivas y los métodos habituales de integración, continúa con el concepto de integral definida y finaliza con el estudio de los métodos de integración numérica.

Termina el libro con una Unidad dedicada al Cálculo de probabilidades. En ella se repasan las técnicas de la Combinatoria y se estudia con detalle la probabilidad en espacios finitos.

ÍNDICE

PRÓLOGO 5

UNIDAD 1.—SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. DISCUSIÓN 9

TEMA 1.—**Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss** 10

1. Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.. 10
2. Sistemas de ecuaciones lineales 13
3. Sistemas equivalentes 15
4. Resolución de sistemas: Método de Gauss. 17
5. Discusión del método de Gauss 22
6. Aplicación del método de Gauss a la discusión de sistemas 24

Ejercicios finales 28

TEMA 2.—**Espacios vectoriales** 30

1. Espacios vectoriales reales 30
2. Subespacios vectoriales 33
3. Dependencia lineal 36
4. Dependencia e independencia lineal. Propiedades 39
5. Sistemas de generadores 40
6. Bases. Dimensión 43
7. Rango de un conjunto de vectores 46

Ejercicios finales 49

TEMA 3.—**Matrices y aplicaciones lineales** ... 50

1. Matrices de números reales. Definiciones... 50
2. El espacio vectorial de las matrices de orden $m \times n$ 53
3. Producto de matrices 55
4. Rango de una matriz 59
5. Aplicaciones lineales 60
6. Matriz asociada a una aplicación lineal 65

Ejercicios finales 67

TEMA 4.—**Determinantes** 69

1. Permutaciones 69
2. Definición de determinante 73
3. Propiedades de los determinantes 76
4. Menor complementario y adjunto 79
5. Cálculo de determinantes 82
6. Determinantes y dependencia lineal 86
7. Los determinantes y el rango de una matriz. 88

Ejercicios finales 93

TEMA 5.—**La regla de Cramer y el teorema de Rouché** 94

1. Cálculo de la matriz inversa 94
2. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones 97
3. Regla de Cramer 99
4. Teorema de Rouché 102

Ejercicios finales 109

UNIDAD 2.—ESPACIOS AFÍN Y EUCLÍDEO TRIDIMENSIONALES 111

TEMA 6.—**La recta y el plano en el espacio afín** 112

1. Vectores en el plano 112
2. Coordenadas de un punto en el espacio... 112
3. La recta en el espacio afín 115
4. Recta determinada por dos puntos 120
5. El plano en el espacio afín 121
6. Plano determinado por tres puntos 125
7. Otras determinaciones del plano 128

Ejercicios finales 130

TEMA 7.—**Relaciones de incidencia en el espacio** 132

1. Posiciones relativas de dos planos 132
2. Haz de planos 140
3. Posiciones relativas de recta y plano 142
4. Posiciones relativas de dos rectas 146

Ejercicios finales 151

TEMA 8.—**El espacio euclídeo** 152

1. Producto escalar en el espacio vectorial V^3. Propiedades 152
2. Expresión analítica del producto escalar.. 154
3. Espacio euclídeo tridimensional 156
4. Cosenos directores de un vector 157
5. Producto vectorial 159
6. Propiedades del producto vectorial 160
7. Área del triángulo 164
8. Producto mixto 165

Ejercicios finales 168

TEMA 9.—**Problemas métricos** 169
1. Vector característico de un plano 169
2. Ecuación normal del plano 170
3. Problemas resueltos 170
4. Ángulo de dos rectas 174
5. Ángulo de dos planos 175
6. Ángulo de recta y plano 176
7. Distancia de un punto a un plano 177
8. Distancia de un punto a una recta 179
9. Distancia mínima entre dos rectas que se cruzan 180

Ejercicios finales 182

TEMA 10.—**Transformaciones en el plano euclídeo** 184
1. Isometrías 184
2. Simetrías ortogonales axiales 185
3. Puntos fijos de una isometría 189
4. Descomposición de una isometría en producto de simetrías. Isometrías positivas y negativas 190
5. Clasificación de las isometrías de $\mathscr{E}_2$ 192
6. Traslaciones 193
7. Giros 196

Ejercicios finales 199

TEMA 11.—**Isometrías en el espacio euclídeo.** 200
1. Isometrías 200
2. Simetrías especulares 200
3. Puntos fijos de una isometría 203
4. Descomposición de una isometría en producto. Isometrías positivas y negativas 204
5. Algunas isometrías particulares de $\mathscr{E}_3$ 205
6. Clasificación de las isometrías de $\mathscr{E}_3$ 211

Ejercicios finales 213

TEMA 12.—**Curvas y superficies** 214
1. Curvas en el plano 214
2. Coordenadas polares 217
3. Algunos ejemplos de curvas en polares 219
4. Coordenadas cilíndricas y esféricas en el espacio 222
5. Superficies y curvas en el espacio 225
6. Estudio de algunas superficies 227

Ejercicios finales 232

UNIDAD 3.—AMPLIACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 234

TEMA 13.—**Los números reales como fundamento del cálculo** 235
1. Los números reales 235
2. Algunas propiedades de los números reales. 238

Ejercicios finales 242

TEMA 14.—**Continuidad** 243
1. Funciones continuas 243
2. Teorema de Bolzano 247
3. Continuidad y acotación 250
4. Teorema de Bolzano-Weierstrass 252
5. Continuidad uniforme 254

Ejercicios finales 257

TEMA 15.—**Funciones derivables** 259
1. Derivada de una función 259
2. Derivadas laterales 261
3. Función derivada. Derivadas sucesivas 262
4. Interpretación geométrica de la derivada 264
5. Interpretación física de la derivada 267
6. Crecimiento y decrecimiento de una función 270
7. Máximos y mínimos de una función 271
8. Teorema de Rolle 272
9. Teorema del valor medio 274
10. Teorema de Cauchy 276

Ejercicios finales 277

TEMA 16.—**Consecuencias del teorema del valor medio** 279
1. Consecuencias del teorema del valor medio. 279
2. Otras aplicaciones del teorema del valor medio 281
3. Regla de L'Hôpital 282

Ejercicios finales 287

TEMA 17.—**La fórmula de Taylor. Aplicaciones** 289
1. Desarrollo de un polinomio en potencias de $x - a$ 289
2. Polinomios de Taylor de una función 291
3. Infinitésimos. Comparación de funciones 293
4. Algunos ejemplos de desarrollos de Taylor. 299
5. Aplicaciones del teorema de Taylor 302

Apéndice 305

Ejercicios finales 309

TEMA 18.—**Resolución aproximada de ecuaciones** 311
1. Ecuaciones 311
2. Ecuaciones algebraicas 313
3. Resolución aproximada de ecuaciones 319

Ejercicios finales 327

TEMA 19.—**Funciones primitivas: Integral indefinida** 328
1. Primitivas de una función: Propiedades 328
2. Primitivas inmediatas 331
3. Integración por cambio de variable 332

4. Integración por partes ... 333
5. Integración de funciones racionales ... 336
6. Integración de funciones trigonométricas ... 343
7. Integración de funciones irracionales ... 347
8. Ecuaciones diferenciales ... 349

Ejercicios finales ... 352

TEMA 20.—**El concepto de integral** ... 353

1. El problema del área como origen del cálculo integral ... 353
2. Funciones escalonadas ... 356
3. Integral de una función escalonada: Area de recintos limitados por funciones escalonadas ... 359
4. Integral de una función continua en un intervalo cerrado ... 363
5. Propiedades de la integral ... 368
6. Generalización del concepto de integral ... 373

Ejercicios finales ... 377

TEMA 21.—**El teorema fundamental del cálculo integral** ... 379

1. Función integral asociada a una función continua ... 379
2. Regla de Barrow ... 382
3. Teorema del valor medio del cálculo integral ... 384

Ejercicios finales ... 385

TEMA 22.—**Aplicaciones de la integral definida** 386

1. Áreas de recintos planos ... 386
2. Área de figuras planas en coordenadas polares ... 392
3. Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones continuas ... 393
4. Longitud de un arco de curva plana ... 396
5. Área de una superficie de revolución ... 398
6. Movimiento rectilíneo de una partícula ... 400
7. Trabajo de una fuerza ... 402

Ejercicios finales ... 404

TEMA 23.—**Interpolación** ... 405

1. El problema de la interpolación ... 405
2. Método de interpolación de Lagrange ... 406
3. Método de Newton ... 410

Ejercicios finales ... 415

TEMA 24.—**Integración numérica** ... 416

1. Método de los trapecios ... 416
2. Método de Simpson ... 419

Ejercicios finales ... 424

UNIDAD 4.—AMPLIACIÓN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES ... 425

TEMA 25.—**Álgebra de sucesos** ... 426

1. Espacio muestral ... 426
2. Espacio de sucesos ... 427
3. Inclusión e igualdad de sucesos ... 429
4. Operaciones con sucesos ... 429
5. Álgebra de Boole de sucesos $\mathscr{P}(E)$ ... 432
6. Otras operaciones con sucesos ... 433
7. Álgebra de sucesos ... 434
8. Sistema completo de sucesos ... 434
9. Álgebra de sucesos engendrada por un sistema completo de sucesos ... 435
10. Variaciones ordinarias ... 435
11. Variaciones con repetición ... 436
12. Permutaciones ordinarias ... 437
13. Permutaciones con repetición ... 438
14. Combinaciones ordinarias ... 439
15. Combinaciones con repetición ... 440

Ejercicios finales ... 443

TEMA 26.—**Frecuencia y probabilidad** ... 445

1. Frecuencias ... 445
2. Propiedades de las frecuencias relativas ... 445
3. Definiciones clásica y frecuencial de probabilidad ... 448
4. Problemas resueltos ... 449

Ejercicios finales ... 452

TEMA 27.—**Estudio axiomático de la probabilidad** ... 453

1. Concepto de medida ... 453
2. Definición axiomática de probabilidad ... 453
3. Teoremas que se deducen de la definición axiomática de probabilidad ... 456
4. Construcción de una probabilidad ... 461

Ejercicios finales ... 463

TEMA 28.—**Probabilidad condicionada. Independencia** ... 464

1. Probabilidad condicionada ... 464
2. Probabilidad compuesta ... 467
3. Dependencia e independencia de sucesos ... 467
4. Extensión del concepto de independencia ... 469
5. Experiencias sucesivas. Espacio producto ... 471
6. Problemas resueltos ... 472

Ejercicios finales ... 475

TEMA 29.—**Teorema de Bayes y ley binomial** ... 477

1. Teorema y fórmulas de Bayes ... 477
2. Ley binomial: Fórmula de Bernoulli ... 481
3. Problemas resueltos ... 483

Ejercicios finales ... 487

UNIDAD 1
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. DISCUSIÓN

La idea central de esta Unidad, que consta de cinco temas, es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Ya en el primer tema se resuelven y se hace la discusión de sistemas con cualquier número de ecuaciones, sin restricción alguna, utilizando el método de Gauss.

Sin embargo, en esta Unidad aparecen conceptos tales como los de matriz, rango, vector y determinante, que si bien no son estrictamente necesarios para el estudio de los sistemas de ecuaciones, sí posibilitan dar otro enfoque a esta cuestión. Como se verá en el último tema de esta Unidad, el rango de matrices permitirá determinar si el sistema es o no compatible sin necesidad de resolverlo.

Ahora bien, la verdadera utilidad de los conceptos antes mencionados se verá mejor en la segunda Unidad.

En efecto, el uso de matrices, rangos, vectores y determinantes permite dar un tratamiento unitario y un enfoque moderno a los temas de geometría afín y métrica.

En la segunda Unidad veremos que una ecuación lineal con tres incógnitas es la ecuación de un plano, y el problema de la clasificación y resolución de un sistema de ecuaciones con no más de tres incógnitas se interpretará geométricamente como un problema de posiciones e intersecciones de planos.

TEMA 1
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS

Se inicia en este tema el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, que se completará más tarde, en el tema 5, con la regla de Cramer y el teorema de Rouché.

La terminología usual y la matriz asociada a cada sistema se introducen partiendo de ejemplos sencillos de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas que el lector debe conocer.

Después de presentar la equivalencia de sistemas y los teoremas de equivalencia, se estudia el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, así como para la discusión de los mismos.

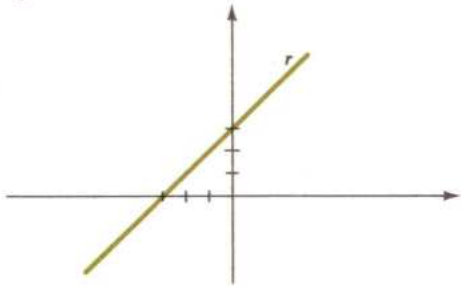
Conviene que el lector conceda importancia al método de Gauss, que, además de ser el método más efectivo para la resolución de sistemas, se utiliza, como se verá en los temas que siguen, para el cálculo de rangos.

1 SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

1.1. Una *ecuación lineal* con dos incógnitas es una relación de la forma $ax + by = c$ [1], donde a, b y c son números reales conocidos y las letras x e y son las incógnitas. Cada par de números (α, β) que verifiquen la ecuación [1] se dice una solución de la ecuación. La representación gráfica de una ecuación como la [1] es una recta.

Así, la ecuación $x - y = -3$ tiene por solución todos los pares de números reales de la forma $(\lambda, \lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(0, 3), (1, 4), (2, 5), (−3, 0), etc., son soluciones de la ecuación cuya representación gráfica es la recta r de la figura 1.

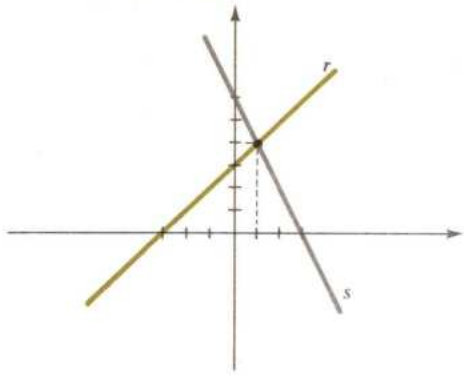


(Fig. 1)

1.2. Consideremos ahora el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

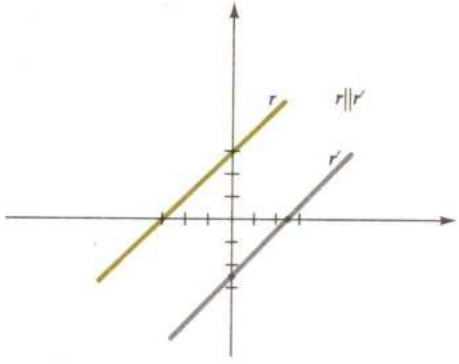
$$[2]\ \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

En la figura 2 se han representado las ecuaciones del sistema. Las rectas r y s, representación gráfica de la primera y segunda ecuaciones del sistema, se cortan en el punto (1, 4) y el sistema tiene *solución única*, que es el punto común de ambas rectas.

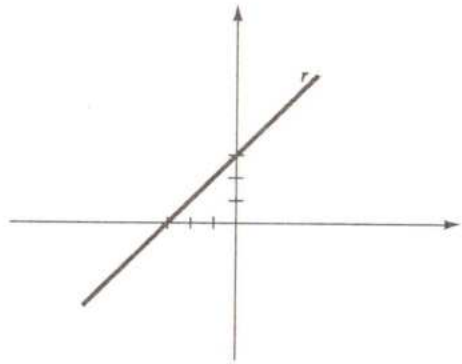


(Fig. 2)

Finalmente, los sistemas [3] $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$ y [4] $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$ se han representado en las figuras 3 y 4, respectivamente.



(Fig. 3)



(Fig. 4)

En la figura 3 las rectas son paralelas, y, al no tener puntos comunes, el sistema [3] carece de solución y se dice que es *incompatible*. Analíticamente es fácil probar que el sistema [3] no tiene solución, ya que al multiplicar por 2 la primera ecuación resultará -6 en el segundo miembro, y no 5.

En la figura 4, las dos rectas son coincidentes. La segunda ecuación del sistema [4] se obtiene multiplicando la primera por 2, por lo que ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones.

Toda solución de la primera es solución de la segunda, y recíprocamente. Las soluciones de ambas ecuaciones son los pares de números reales de la forma $(\lambda, \lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$... Se dice que el sistema [4] tiene infinitas soluciones, que son los puntos de la recta, y se llama *sistema compatible indeterminado*.

Los tres sistemas estudiados hasta ahora nos permiten adelantar la siguiente terminología:

Sistema	Soluciones	Interpretación geométrica	Tipo de sistema
$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$	Solución única $(1, 4)$.	Dos rectas que se cortan.	Compatible determinado.
$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$	Carece de solución.	Dos rectas paralelas.	Incompatible.
$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$	Infinitas soluciones de la forma $(\lambda, \lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.	Dos rectas coincidentes.	Compatible indeterminado.

1.3. En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

los números reales a, a', b y b' se llaman *coeficientes*, y los c y c', *términos independientes*.

El sistema anterior se puede escribir prescindiendo de las incógnitas colocando los coeficientes y los términos independientes en una tabla como la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$$

La raya vertical separa los coeficientes de los términos independientes. Esta tabla de números asociada al sistema se dice que es *una matriz* de dos filas y tres columnas.

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc|c} \text{Primera columna} & \text{Segunda columna} & \text{Tercera columna} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Primera fila} \rightarrow \\ \text{Segunda fila} \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) \end{array}$$

Se observa que hay tantas filas como ecuaciones tiene el sistema, que a cada incógnita corresponde una columna y que la última columna de la derecha corresponde a los términos independientes.

A los sistemas del apartado **1.2**:

$$[2]\ \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \qquad [3]\ \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \qquad [4]\ \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$$

corresponden las matrices (2'), (3') y (4'), respectivamente:

$$(2')\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \qquad (3')\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \qquad (4')\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Esta forma de representar un sistema de ecuaciones mediante una matriz se puede utilizar para un sistema de cualquier número de ecuaciones y de incógnitas.

Ejemplos:

- La matriz asociada al sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

- El sistema correspondiente a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$ es $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 3z = 1 \\ x + 4y + 2z = 3 \\ 5y + z = 2 \end{cases}$

Nota: Más adelante veremos que estudiar un sistema, es decir, averiguar si es compatible determinado, incompatible o compatible indeterminado, se reduce a estudiar la matriz asociada a dicho sistema.

Ejercicio:

Indicar de qué tipo es cada uno de los siguientes sistemas, dando la interpretación geométrica.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ -4x + 6y = -28 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ -8x + 2y = 6 \end{cases}$

---

2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1. En general, se llama sistema de m ecuaciones con n incógnitas a todo sistema de relaciones de la forma [1].

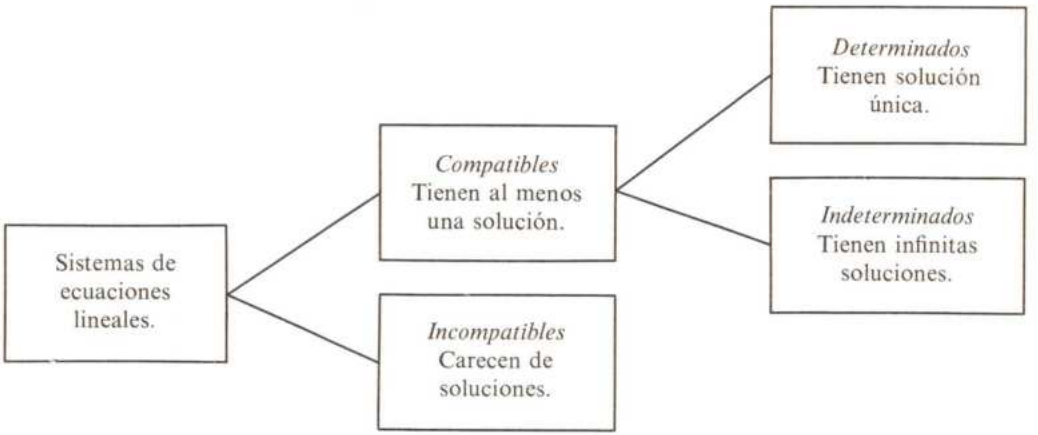
$$[1] \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_m \end{cases}$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas, los números reales a_{ij} reciben el nombre de *coeficientes* de las incógnitas y los números b_{ij} son los términos independientes.

El subíndice i de a_{ij} indica la ecuación i, y el subíndice j, la incógnita j; en a_{21}, el 2 indica la segunda ecuación y el 1, que multiplica a la incógnita x_1.

Diremos que n números reales ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ son una solución del sistema [1] si satisfacen a todas las ecuaciones del sistema, es decir, cuando al sustituir estos valores en las ecuaciones del sistema los dos miembros toman el mismo valor.

Un sistema se dice *compatible* si admite al menos una solución; por el contrario, se dice incompatible si no admite ninguna solución. Un sistema compatible se llama determinado si tiene una *única solución*, y se llama *indeterminado* si tiene infinitas soluciones.



Resolver un sistema es determinar sus soluciones.

Un sistema se dice *homogéneo* cuando todos los términos independientes b_1, b_2, ..., b_n son nulos. El sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

es homogéneo.

Los sistemas homogéneos tienen siempre, al menos, la solución (0, 0, ..., 0), que recibe el nombre de solución *trivial*. Por consiguiente, los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

Al igual que se hizo en **1.3**, al sistema [1] se le puede asociar la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Esta matriz tiene m filas, tantas como ecuaciones tiene el sistema. A la izquierda de la raya vertical hay n columnas, tantas como incógnitas tiene el sistema, y a la derecha hay una columna correspondiente a los términos independientes. La matriz se llama *matriz asociada al sistema.*

En el sistema [1] llamaremos diagonal del sistema a la línea que une los coeficientes que tienen los subíndices iguales: a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ...

2.2. Si en cada ecuación del sistema [1] de **1.2** pasamos el término independiente al primer miembro, el sistema puede escribirse en la forma abreviada siguiente:

$$[2] \quad \begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es una solución del sistema [1], y por tanto del [2], se tienen las siguientes igualdades numéricas:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases} \quad \text{o también} \quad \begin{cases} E_1(\alpha) = 0 \\ E_2(\alpha) = 0 \\ \cdots\cdots \\ E_m(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son m números reales cualesquiera, la ecuación $\lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + \cdots + \lambda_m E_m(x) = 0$ se dice que es una *combinación lineal* de las ecuaciones del sistema [2]. Los números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se dicen los *coeficientes* de la combinación lineal.

3 SISTEMAS EQUIVALENTES

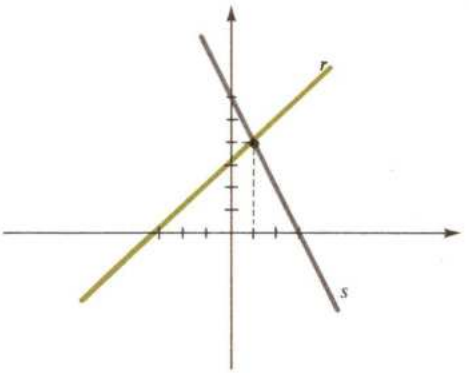
3.1. Sea el sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$

Se observa que la tercera ecuación del sistema se obtiene de la primera multiplicando los dos miembros por 4; $4(x - y) = 4(-3)$.

Si representamos las rectas correspondientes a cada ecuación del sistema, se observa que la recta r es la representación gráfica de las ecuaciones primera y tercera (Fig. 5); en consecuencia, el sistema dado tiene las mismas soluciones que

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Estos sistemas, aunque tienen diferente número de ecuaciones, tienen la misma solución (1,4), y se dice que son equivalentes.



(Fig. 5)

En general, *dos sistemas con el mismo número de incógnitas (aunque no tengan el mismo número de ecuaciones) se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y recíprocamente.*

Las siguientes transformaciones realizadas en un sistema dan lugar a otro equivalente:

a) Cambiar de orden las ecuaciones del sistema.
b) Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.
c) Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás.
d) Sustituir una ecuación por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un número cualquiera.
e) Sustituir una ecuación del sistema por una combinación lineal de ella y de las restantes siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida sea distinto de cero.

La demostración de *a*) y *b*) es inmediata.

3.2. *Demostración de* c)

Consideremos el sistema [1] $\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_m(x) = 0 \\ \lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + \cdots + \lambda_m E_m(x) = 0 \end{cases}$

donde la última ecuación es una combinación lineal de las demás. Si suprimimos esta ecuación resulta el sistema [2] $\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$

Es evidente que toda solución de [1] es también solución de [2], ya que las ecuaciones del sistema [2] figuran en el sistema [1]. Recíprocamente, sea α una solución del sistema [2]; entonces, α será solución de las m primeras ecuaciones del sistema [1]; probemos que α es también solución de la última ecuación de [1].

En efecto, por ser α solución de [2], se tiene $\begin{cases} E_1(\alpha) = 0 \\ E_2(\alpha) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_m(\alpha) = 0 \end{cases}$

y multiplicando la primera, segunda, tercera,..., ecuaciones por los números λ_1, λ_2, λ_3,..., respectivamente, y sumando resulta $\lambda_1 E_1(\alpha) + \lambda_2 E_2(\alpha) + \cdots + \lambda_m E_m(\alpha) = 0$, y esta última igualdad nos indica que α es también solución de la última ecuación de [1]. Por tanto, los sistemas [1] y [2] son equivalentes. Con este teorema queda también demostrado que *toda solución de un sistema es también solución de toda ecuación que sea combinación lineal de las ecuaciones del sistema.*

3.3. *Demostración de* d)

Si en el sistema [3] $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

se sustituye, por ejemplo, la segunda ecuación por la suma de ella y la primera multiplicada por un número real cualquiera λ, se tiene el sistema:

[4] $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) + \lambda(a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) = b_1 + \lambda b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es una solución del sistema [3], es evidente que también es solución del [4]. Recíprocamente, si α es solución de [4], se verifica:

[5] $\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n) + \lambda(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n) = b_2 + \lambda b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$

Luego α satisface a todas las ecuaciones del sistema [3], salvo, posiblemente, la segunda. Veamos que α es también solución de la segunda ecuación de [3].

De la segunda igualdad de [5], y teniendo en cuenta la primera, resulta:

$(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n) + \lambda b_1 = b_2 + \lambda b_1$, de donde

$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2$, lo que significa que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisface también a la segunda ecuación de [3].

3.4. *Demostración de* e)

Sea el sistema [6] $\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$

Si sustituimos la primera ecuación por la siguiente combinación lineal:

$$\lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + \cdots + \lambda_m E_m(x) = 0, \text{ en donde } \lambda_1 \neq 0$$

se tiene el sistema [7] $\begin{cases} \lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + \cdots + \lambda_m E_m(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$

Por lo dicho en **3.2**, toda solución de [6] es solución de [7].

Recíprocamente, sea α una solución del sistema [7]; entonces, se tiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 E_1(\alpha) + \lambda_2 E_2(\alpha) + \cdots + \lambda_m E_m(\alpha) = 0 \\ E_2(\alpha) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_m(\alpha) = 0 \end{cases}$$

es decir, α es solución de todas las ecuaciones del sistema [6], excepto, posiblemente, la primera. Veamos que también $E_1(\alpha) = 0$.

Sustituyendo en la primera ecuación de [7] $E_2(\alpha) = 0$, $E_3(\alpha) = 0$, $\ldots$, $E_n(\alpha) = 0$ resulta $\lambda_1 E_1(\alpha) = 0$, y como $\lambda_1 \neq 0$, se tiene $E_1(\alpha) = 0$.

4 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS: MÉTODO DE GAUSS

4.1. Consideremos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$[1] \quad \begin{cases} -x + y + 4z = 10 \\ 2y + z = 4 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z = \dfrac{6}{3} = 2$; sustituyendo este valor de z en la segunda resulta: $2y + 2 = 4 \Rightarrow y = 1$. Llevando a la primera ecuación los valores $y = 1$, $z = 2$, se tiene $-x + 1 + 8 = 10$, de donde $x = -1$.

Por tanto, la terna $(-1,1,2)$ es la solución del sistema dado.

El sistema [1] tiene la particularidad de que se puede resolver mediante sucesivas sustituciones y recibe el nombre de *sistema escalonado.*

Otros sistemas escalonados son los siguientes:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 2 \\ 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Un sistema escalonado *es un sistema en el que todos los coeficientes que hay por debajo de la diagonal del sistema* a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... *son cero.*

El método de Gauss para resolver sistemas consiste en sustituir el sistema dado por otro equivalente, aplicando las transformaciones de **3.1** hasta conseguir un sistema escalonado. Veamos los casos que se pueden presentar.

4.2. *Sistemas determinados (con solución única).*

Vamos a resolver el sistema [2] $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$

por el método de Gauss. Como lo que intentamos con este método es obtener un sistema escalonado, vamos a anular los coeficientes de x en la segunda y tercera ecuaciones. Para ello comenzamos multiplicando la primera ecuación por -2 y sumamos el resultado a la segunda (transformación d) de **1.3**).

$$\begin{array}{rr} -2 \times \text{primera ecuación} \rightarrow & -2x + 2y + 4z = 2 \\ & 2x - 3y + 4z = 4 \\ \hline & -y + 8z = 6 \end{array}$$

Así se obtiene el siguiente sistema, equivalente al dado:

$$[3] \quad \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$$

Para eliminar x de la tercera ecuación multiplicamos la primera por -5 y sumamos el resultado a la tercera (transformación d) de **1.3**).

$$\begin{array}{rr} -5 \times \text{primera ecuación} \rightarrow & -5x + 5y + 10z = 5 \\ & 5x - y + 3z = 16 \\ \hline & 4y + 13z = 21 \end{array}$$

Así se obtiene el sistema [4] $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 4y + 13z = 21 \end{cases}$

equivalente a los anteriores, pero en este último no aparece la x ni en la segunda ni en la tercera ecuaciones.

Para obtener un sistema escalonado basta con eliminar y de la tercera ecuación en el sistema [4]. Para ello, se multiplica la segunda ecuación del sistema [4] por 4 y se suma a la tercera ecuación (transformación d) de **1.3**).

$$\begin{array}{r} -4y + 32z = 24 \\ 4y + 13z = 21 \\ \hline 45z = 45 \end{array}$$

Así se obtiene el sistema escalonado $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{cases}$

que es equivalente a los anteriores. De la tercera resulta $z = 1$, y llevando este valor a la segunda, queda $y = 2$; finalmente, de la primera sale $x = 3$.

Veamos cómo se resuelve este mismo sistema utilizando la matriz asociada al sistema.

La matriz asociada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right)$

Eliminar la x de la segunda y tercera ecuaciones es lo mismo que hacer ceros los coeficientes 2 y 5.

Para ello sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por -2, y a la tercera, la primera multiplicada por -5. Así resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{array}\right)$$

La matriz obtenida está asociada a un sistema equivalente al primero.

Ahora debemos hacer cero el 4 de la tercera fila. Para ello sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por 4. Así resulta la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{array}\right)$$

cuyo sistema asociado es el sistema escalonado anterior: $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{cases}$

Consideremos ahora el sistema

$$S_1 \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Sumando a la segunda fila de la matriz la primera, y a la tercera, la primera multiplicada por (-2), se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Sumando ahora a la tercera fila la segunda resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

En consecuencia, el sistema escalonado equivalente a S_1 es: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y - z = 4 \\ -2z = 0 \end{cases}$

De donde $z = 0$, $y = -4$, $x = -5$. Por tanto $(-5, -4, 0)$ es la única solución de S_1, que es por ello compatible y determinado.

4.3. Acabamos de ver que a toda transformación de las estudiadas en **3.1** que proporciona sistemas equivalentes, corresponde una transformación en la matriz ampliada asociada al sistema. Estas transformaciones para las matrices, que proporcionan sistemas equivalentes, son:

a) Cambiar de orden las filas de la matriz.

b) Multiplicar una fila de la matriz por un número distinto de cero.

c) Suprimir una fila que sea combinación lineal de las demás.

d) Sustituir una fila por la suma de ella más otra multiplicada por un número cualquiera.

e) Sustituir una fila por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente multiplicador de la fila sustituida sea distinto de cero.

Nota: Veremos más adelante que estas mismas transformaciones nos permitirán hallar el rango de un conjunto de vectores (tema 2) y el rango de una matriz (tema 3).

4.4. *Sistemas indeterminados (con infinitas soluciones).*

Sea

$$S_2 \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

Entonces: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

El hecho de que en la tercera fila sean cero todos los coeficientes (identidad o ecuación trivial) significa que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, la tercera ecuación es igual a la suma de las dos primeras y en consecuencia se puede suprimir:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el sistema escalonado equivalente a S_2 tiene solamente dos ecuaciones no triviales

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \end{cases}$$

De donde $y = -2 + 7z \Rightarrow x - (-2 + 7z) + 3z = 4 \Rightarrow x = 2 + 4z$. Haciendo $z = \lambda$, las soluciones de S_2 son las ternas $(2 + 4\lambda, -2 + 7\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Por ello, S_2 es un sistema compatible, indeterminado y uniparamétrico (uniparamétrico debido a que las soluciones de S_2 dependen de un solo parámetro).

Sea

$$S_4 \begin{cases} x + y - z + t = 6 \\ -x + 3y - 2z + 2t = -1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema escalonado equivalente a S_4 resulta:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 6 \\ 4y - 3z + 3t = 5 \end{cases}$$

De donde $y = \dfrac{5 + 3z - 3t}{4} \Rightarrow x = \dfrac{19 + z - t}{4}$.

Haciendo $z = \lambda$ y $t = \mu$, las soluciones de S_4 se pueden expresar en la forma

$$\left(\frac{19 + \lambda - \mu}{4}, \frac{5 + 3\lambda - 3\mu}{4}, \lambda, \mu\right), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Diremos que el sistema dado es compatible, indeterminado y biparamétrico porque las soluciones dependen de dos parámetros.

4.5. *Sistemas incompatibles (carecen de soluciones).*

Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Siempre que sea posible es cómodo situar un 1 en la parte superior izquierda de la matriz, y esto siempre se puede conseguir aplicando las transformaciones de **3.1** o **4.3.** Cambiando de orden las incógnitas en la ecuación en el sistema propuesto se pueden cambiar la primera y tercera filas (transformación d) de **3.1**) y resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Ahora sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por -2 y a la tercera la primera multiplicada por -4 (transformación d) de **4.3**).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Sumando a la tercera la segunda multiplicada por -2 resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

con lo que el sistema escalonado final es:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 0z = -3 \end{cases}$$

La última ecuación del sistema es imposible, ya que no hay ningún número que multiplicado por 0 dé 3. Por esta razón el sistema propuesto no tiene solución, y por tanto es incompatible.

Consideremos ahora el sistema de tres incógnitas con dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 4 \\ 2x - 6y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

Sumando a la segunda ecuación la primera multiplicada por -2, resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \end{cases}$$

El sistema es, en consecuencia, incompatible.

5 DISCUSIÓN DEL MÉTODO DE GAUSS

5.1. En **4.4** se vio que el sistema escalonado correspondiente a un sistema dado puede tener menor número de ecuaciones que éste. Por otra parte, en **4.5** se llegó a un sistema escalonado que contenía una, la ecuación $0z = -3$, que es una contradicción, por lo cual el sistema era incompatible.

En general, sea S un sistema de m ecuaciones con n incógnitas como el [1] de **2.1** y supongamos que al aplicarle el método de Gauss, una vez suprimidas las ecuaciones de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ (identidades), resulta un sistema escalonado S_e de r ecuaciones con n incógnitas.

Entonces:

a) Si en S_e hay alguna ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c$, o, lo que es lo mismo, $0 = c$ $(c \neq 0)$, el sistema es incompatible.

b) En caso contrario, el sistema es compatible, siendo compatible determinado si $r = n$ y compatible indeterminado si $r < n$.

Si al aplicar el método de Gauss, el sistema escalonado que se obtiene tiene más ecuaciones que incógnitas, entonces se debe verificar que cada una de las soluciones posibles satisface a todas las ecuaciones.

En el caso de ser $r < n$, la última ecuación del sistema escalonado tendrá varias incógnitas; entonces una de ellas se despeja en función de las demás y se continúa con las sustituciones propias del método.

Todo sistema homogéneo S, de m ecuaciones con n incógnitas, en el que $m < n$, tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado).

5.2. En efecto, al pasar al sistema escalonado S_e correspondiente, el número r de ecuaciones de S_e después de suprimir las ecuaciones de la forma $0 = 0$ (identidades) será menor que n, ya que $r \leq m < n$ y, por consiguiente, tendrá infinitas soluciones.

Ejemplo:

- Como en el sistema homogéneo $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$ el número de ecuaciones es $m = 2$ y el número de incógnitas $n = 3$ y $m < n$, se puede afirmar que tiene infinitas soluciones. Sumando a la segunda ecuación la primera multiplicada por -2 resulta el siguiente sistema escalonado $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$

$$y = 3z;\ x = 3y - 2z = 7z$$

La solución es $\begin{cases} x = 7z \\ y = 3z \end{cases}$

Al dar valores a z se obtienen soluciones particulares del sistema.

Así, para $z = 1$, resulta la solución (7, 3, 1); para $z = 2$ tiene la solución (14, 6, 2), etc. La solución $(7z, 3z, z)$, con $z \in \mathbb{R}$, o $(7\lambda, 3\lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se dice que es la solución general o el conjunto de las soluciones.

Ejercicios:

1. Determinar las soluciones de cada uno de los sistemas escalonados:

$$S_1 \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ -3y + z = 6 \\ 2 = 4 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 4x - 8y - 2z = -1 \\ 2y + 3z = 6 \\ 2y + 3z = 6 \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} 5x + y - z + t = 1 \\ 3y + z + 2t = 2 \\ 2 + 3t = 5 \end{cases}$$

$$S_4 \begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ y + z = 4 \\ 2z = 6 \end{cases} \qquad S_5 \begin{cases} -2x + y - z = 12 \\ 2y + z = 6 \\ z = 2 \end{cases} \qquad S_6 \begin{cases} x + y + z = 8 \\ y + z = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción de Gauss.

$$S_1 \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ -x + 2y - z = 6 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y - z = 4 \\ 6x - y + z = 0 \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$S_4 \begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad S_5 \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases} \qquad S_6 \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$$

---

6 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE GAUSS A LA DISCUSIÓN DE SISTEMAS

6.1. Sea el sistema $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$

Discutir este sistema significa averiguar el tipo de sistema que es según los valores del parámetro a.

La matriz correspondiente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Las siguientes transformaciones permiten llegar a la matriz asociada al sistema escalonado correspondiente al sistema dado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (2-a-a^2)z = 1-a \end{cases}$$

Como $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$ resulta:

1) Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, el sistema es compatible determinado.

   Las soluciones son:

$$z = \frac{1-a}{2-a-a^2} = \frac{1-a}{-(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = -\frac{(a-1)}{a-1}z = z = \frac{1}{a+2}$$

$$x = 1 - az - y = \frac{1}{a+2}$$

2) Si $a = 1$, la segunda y la tercera ecuaciones del sistema escalonado se convierten en ecuaciones triviales (identidades) que se pueden suprimir y la primera se transforma en $x + y + z = 1$, de donde $x = 1 - y - z$. Las soluciones del sistema serían en este caso las ternas de la forma $(1 - y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

3) Si $a = -2$, la tercera ecuación del sistema se convierte en $0z = 3$, y el sistema es incompatible.

6.2. Discutir el siguiente sistema y resolverlo en el caso de que corresponda.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = a \\ y + z = 6 \\ -y + 2z = a \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

Para eliminar x en la cuarta ecuación sumamos a la tercera ecuación multiplicada por -2, la primera multiplicada por 3.

$$\begin{array}{lll} \text{Primera} \times \quad 3 \rightarrow & 6x - 12y + 3z = 3a \\ \text{Cuarta} \times (-2) \rightarrow & -6x + 4y \quad = \quad -22 \\ \hline & -8y + 3z = 3a - 22 \end{array}$$

Así se obtiene:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = a \\ y + z = 6 \\ -y + 2z = a \\ -8y + 3z = 3a - 22 \end{cases}$$

Sumamos a la tercera la segunda y a la cuarta la segunda multiplicada por 8 y resulta:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = a \\ y + z = 6 \\ 3z = a + 6 \\ 11z = 3a + 26 \end{cases}$$

Eliminamos z entre la tercera y cuarta ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -33z = -11a - 66 \\ 33z = 9a + 78 \\ \hline 0 = -2a + 12 \end{array}$$

Así resulta el sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = a \\ y + z = 6 \\ 3z = a + 6 \\ 0z = -2a + 12 \end{cases}$$

Si $-2a + 12 \neq 0$, es decir, si $a \neq 6$, el sistema es incompatible.

Si $-2a + 12 = 0$, es decir, si $a = 6$, la última ecuación es trivial y se puede suprimir, y resulta:

de la tercera $\rightarrow z = \dfrac{6 + 6}{3} = 4$;

de la segunda $\rightarrow y = 2$;

de la primera $\rightarrow x = 5$.

Utilizando la matriz asociada al sistema se procedería del modo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & a \\ 3 & -2 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Sumando a la cuarta fila la primera multiplicada por $\frac{-3}{2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & a \\ 0 & 4 & \frac{-3}{2} & 11 - \frac{3}{2}a \end{array}\right)$$

Sumando a la tercera fila la segunda y a la cuarta la segunda multiplicada por -4, resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a + 6 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -13 - \frac{3}{2}a \end{array}\right)$$

Sumando a la cuarta fila la tercera multiplicada por $\frac{11}{2} : 3 = \frac{11}{6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a + 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{3} - 2 \end{array}\right)$$

con lo cual se llega al sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = a \\ y + z = 6 \\ 3z = a + 6 \\ 0z = \frac{a}{3} - 2 \end{cases}$$

y el sistema será incompatible como antes si $\frac{a}{3} - 2 \neq 0$, es decir, si $a \neq 6$.

6.3. Hallar el valor de m para que el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \end{cases}$$

tenga soluciones distintas de la trivial (0, 0, 0) y resolverlo en este caso.

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & m & 0 \end{array}\right)$$

Sumando a la segunda fila la opuesta de la primera y a la tercera la primera multiplicada por -3 se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & m+18 & 0 \end{array}\right)$$

Multiplicando la segunda fila por $-\frac{1}{3}$ resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & m+18 & 0 \end{array}\right)$$

Sumando a la tercera fila la segunda multiplicada por 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema escalonado correspondiente a esta matriz es:

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ (m+2)z = 0 \end{cases}$$

Si $m + 2 = 0$ ($m = -2$), la última ecuación sería una identidad que se podría suprimir y quedaría un sistema escalonado

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

con menor número de ecuaciones que de incógnitas, y, por consiguiente, compatible indeterminado. De la última ecuación resulta $y = 4z$ y de la primera, $x = -y + 6z = 2z$. Las soluciones del sistema son, por tanto, las ternas $(2z, 4z, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Para cada valor de z se obtiene una solución del sistema, y hay, pues, infinitas soluciones. Si $m + 2 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sólo tiene la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

EJERCICIOS FINALES

1. Determinar las soluciones de cada uno de los siguientes sistemas escalonados:

$$S_1\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 3y - 2z + 8t = 1 \\ 4z - t = 2 \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} 3x + 2y - z + 2t = 6 \\ y + z - t = 9 \\ 4z + 6t = 1 \end{cases}$$

$$S_3\begin{cases} 2x + y + z + t = 6 \\ 3y - 4z + 4t = 1 \end{cases} \qquad S_4\begin{cases} 5x - y + z - t = 0 \\ 3y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción de Gauss:

$$S_1\begin{cases} x + y - 2z + t = -1 \\ 2x - y + 3z + 6t = 2 \\ 3x + y - z + 6t = 0 \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x - 2y + z - 2t = 6 \end{cases}$$

$$S_3\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 5 \\ 3x - 2y + 6z = 8 \end{cases} \qquad S_4\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 6x - y - z = 7 \end{cases}$$

3. Discutir el sistema siguiente según los distintos valores de m.

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = m \end{cases}$$

4. Hallar el valor de k para que el siguiente sistema tenga sólo la solución trivial.

$$\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 4x - 6y + 2z = 0 \\ 5x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

5. Hallar el valor de m para que el sistema homogéneo siguiente tenga solución distinta de la trivial.

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 3x + 2y + 4mz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

6. Discutir y resolver el sistema siguiente según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

7. Discutir y resolver el siguiente sistema según los valores del parámetro k.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + ky + z = 0 \end{cases}$$

8. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + kz = 5 \end{cases}$$

   a) Hallar el valor de k que hace el sistema incompatible.
   b) Hallar el valor de k para el cual el sistema es compatible y además $z = -1$.
   c) Para el valor de k hallado en b), resolver el sistema.

9. Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + y + kz = 6 \end{cases}$$

tiene solución única si $k \neq 8$. Resolver el sistema si $k = 8$.

10. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

GAUSS (Johann Karl Friedrich)

Matemático alemán que nació en Brunswick en 1777 y murió en Gotinga en 1855. Desde pequeño fue un niño prodigio y llegó a ser uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, hasta el punto de llamársele «Princeps Mathematicorum» (Príncipe de las Matemáticas).

A los dieciocho años Gauss entró en la universidad alemana de Gotinga bajo la protección del duque de Branswick, que, asombrado por su gran capacidad, le costeó sus estudios.

Gauss trabajó, obteniendo importantes resultados, en casi todos los campos de la Matemática de su tiempo. A los diecinueve años encontró el método de los cuadrados mínimos, que permite trazar la curva que más se adapta a una serie de observaciones de un fenómeno de forma que el error sea mínimo. Poco después, descubrió un método para calcular la órbita del asteroide Ceres, del que sólo se conocían algunas posiciones.

Uno de los problemas que había ocupado a los matemáticos de todos los tiempos era el de la construcción con regla y compás de los polígonos regulares. Este problema consistía en lo siguiente: según Platón, los instrumentos perfectos para las construcciones geométricas eran la regla y el compás (entendiendo por regla un instrumento que sirva para trazar rectas, pero no para medir longitudes); el problema que se plantearon los griegos era si se podían construir por este método los polígonos regulares: triángulo, cuadrado, etc. Gauss, cuando aún estaba en la Universidad, encontró un método para construir el polígono regular de 17 lados y, más aún, demostró que solamente ciertos polígonos regulares podían construirse de esa forma.

Otro de los grandes descubrimientos de Gauss fueron las geometrías no-euclidianas. Desde los tiempos de los griegos se admitía que dados una recta y un punto exterior a ella se podía trazar por dicho punto una paralela y solo una.

Gauss desarrolló una geometría totalmente distinta en la que se podía trazar por un punto más de una paralela (geometría no-euclídea).

Desarrolló este tipo de geometría sin obtener contradicciones en sus resultados; sin embargo, éstos eran tan extraños, que no se atrevió a publicar sus trabajos. Posteriormente Bolyai (matemático húngaro) y Lobachevski (matemático ruso) llegaron a las mismas consecuencias que Gauss y publicaron estudios sobre este tipo de geometrías, por lo que el honor de su descubrimiento se les adjudicó a ellos.

Gauss dio también la primera demostración (aunque no totalmente correcta) del teorema fundamental del álgebra que asegura que toda ecuación de grado n con una incógnita tiene exactamente n soluciones (algunas pueden ser complejas).

También contribuyó con sus estudios a otras ciencias, como la Física, donde hizo observaciones sobre óptica y magnetismo (la unidad de flujo magnético se llama Gauss en su honor).

La increíble capacidad mental de Gauss le acompañó toda su vida, hasta el punto de que puede citarse como anécdota que a los sesenta y dos años aprendió la lengua rusa.

TEMA 2 ESPACIOS VECTORIALES

La noción de espacio vectorial es una de las más importantes de la matemática. Históricamente tiene su origen en el estudio de los vectores del plano y del espacio cuando se definen para ellos las dos operaciones siguientes: suma de vectores y multiplicación de vectores por escalares.

Pero la noción de espacio vectorial es útil en la mayor parte de las teorías matemáticas; es decir, el campo de aplicación de este concepto es muy amplio y diverso (Temas 6 y 7).

1 ESPACIOS VECTORIALES REALES

1.1. Sean A y B dos conjuntos. Por una *ley de composición externa sobre B con dominio de operadores A*, se entiende una aplicación $f\colon A \times B \to B$.

Si $a \in A$ y $x \in B$, la imagen por f del par (a, x) se escribe simplemente ax.

Ejemplo:

- Sea $A = \mathbb{R}$ (cuerpo de los números reales) y $B = \mathbf{V}^2$ (conjunto de los vectores libres del plano). Entonces, la aplicación $f\colon \mathbb{R} \times \mathbf{V}^2 \to \mathbf{V}^2$ que asocia al número real a y al vector libre $\vec{v}$ el vector libre $a\vec{v}$, es una ley de composición externa sobre $\mathbf{V}^2$ con dominio de operadores $\mathbb{R}$.

1.2. Un *espacio vectorial real* es un conjunto $\mathbf{V}$ y dos operaciones, una interna, llamada *suma* y representada por

$$\begin{aligned} +\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \\ (u, v) &\rightsquigarrow u + v \end{aligned}$$

y una externa sobre $\mathbf{V}$ con dominio de operadores $\mathbb{R}$, llamada *multiplicación escalar*, y representada por

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \\ (\lambda, u) &\rightsquigarrow \lambda \cdot u \end{aligned}$$

Estas operaciones deben verificar los siguientes axiomas E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5.

E_1: El par $(\mathbf{V}, +)$ es un grupo abeliano, es decir:

- I) La suma es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in \mathbf{V}$.
- II) Existe elemento neutro: 0.
- III) Todo elemento $u \in \mathbf{V}$ posee opuesto: $-u$.
- IV) La suma es conmutativa: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in \mathbf{V}$.

E_2: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in \mathbf{V} : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

E_3: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall u \in \mathbf{V} \quad : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

E_4: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall u \in \mathbf{V} \quad : \quad (\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

E_5: $\forall u \in \mathbf{V}, \qquad\qquad 1 \cdot u = u$

Si $(\mathbf{V}, +, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real, los elementos de $\mathbf{V}$ se llaman *vectores* y los elementos de $\mathbb{R}$ *escalares*. En la escritura, y para evitar confusiones, los elementos de $\mathbf{V}$ aparecerán de aquí en adelante con una flecha por encima.

Asimismo, y para simplificar la notación, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbf{V}$, la multiplicación escalar $\lambda \cdot \vec{v}$ la designamos simplemente $\lambda\vec{v}$. Por la misma razón, al hablar de un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ se entenderá la terna $(\mathbf{V}, +, \cdot)$; además, cuando no haya confusión alguna, en el texto se dirá simplemente un espacio vectorial $\mathbf{V}$, entendiendo que se trata de un espacio vectorial real. En adelante el elemento neutro de $\mathbf{V}$ se representará por $\vec{0}$ y se llamará el *vector cero*.

1.3. Si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial real se verifican las siguientes propiedades:

a) $0\vec{v} = \vec{0}$, $\forall \vec{v} \in \mathbf{V}$

En efecto; por E_5: $\vec{v} = 1\vec{v} = (1 + 0)\vec{v} = 1\vec{v} + 0\vec{v} = \vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$

b) $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Para demostrar esta propiedad sea $\vec{u} \in \mathbf{V}$; entonces:

$\lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} + \vec{0}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{0} = \vec{0}$

c) $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u}) = \alpha(-\vec{u})$

Demostraremos la primera igualdad:

$\vec{0} = 0\vec{u} = (\alpha + (-\alpha))\vec{u} = \alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u}$

Por tanto $(-\alpha)\vec{u} = -\alpha\vec{u}$

d) $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$

En efecto:

$\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda(\vec{u} + (-1)\vec{v}) = \lambda\vec{u} + (-\lambda)\vec{v} = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$

e) $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ implica $\lambda = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$

En efecto, si $\lambda \neq 0$, multiplicando por λ^{-1} se tiene $\lambda^{-1}(\lambda\vec{u}) = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}$, de donde $\vec{u} = \vec{0}$.

Ejemplos:

- $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

  En efecto, por ser $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un cuerpo, el par $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano; por otra parte, la multiplicación escalar no es otra que el producto ordinario en $\mathbb{R}$, es decir, siendo $\lambda, a \in \mathbb{R}$,

  $$\lambda \cdot a = \lambda a$$

  Trivialmente las propiedades E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 figuran entre las propiedades del producto en $\mathbb{R}$.

- Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$.

  Sobre $\mathbb{R}^2$ se define una suma como sigue:

  $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

  Además se define la siguiente ley de composición externa de elementos de $\mathbb{R}^2$ por elementos de $\mathbb{R}$:

  $$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)\,, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

  De esta forma, la terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.

En efecto:

E_1: El par $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo conmutativo, ya que:

a) La propiedad asociativa se verifica por verificarse en $(\mathbb{R}, +)$.

b) El elemento neutro es el par (0,0).

c) El elemento opuesto del par (x, y) es $(-x, -y)$.

d) Se cumple la propiedad conmutativa por cumplirse en $(\mathbb{R}, +)$.

E_2: Siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \lambda[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] = (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda v_2) = \lambda(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)$$

E_3: Siendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\lambda + \mu)(x, y) = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) = (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

E_4: Siendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(\lambda\mu)(x, y) = ((\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y) = (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y)) = \lambda(\mu x, \mu y) = \lambda(\mu(x, y))$$

E_5: Siendo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$1(x, y) = (1x, 1y) = (x, y)$$

Por tanto $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.

- Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Similarmente al caso de $\mathbb{R}^2$, sobre $\mathbb{R}^3$ se definen una suma y una multiplicación escalar como sigue:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \ \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$$

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Procediendo de la misma forma a lo hecho en $\mathbb{R}^2$ se demuestra que la terna $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

- Veamos ahora el caso que generaliza los tres anteriores.

Sea n un entero positivo y consideremos el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Sobre $\mathbb{R}^n$ se definen una suma y una multiplicación escalar como sigue:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$$

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n), (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathbb{R}^n$$

De la misma manera que en el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se demuestra fácilmente que la terna $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot\mathbb{R})$ se denomina el *espacio vectorial numérico n-dimensional.*

Ejercicios:

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, determinar el vector (x, y, z, t) en cada uno de los siguientes casos:

a) $(x, y, z, t) = 5(6, -1, 8, 4) - 3[(1, 2, -5, 3) - 5(4, 3, -1, 2)]$

b) $6(x, y, z, t) = 8(1, -1, 2, 0) + 7[(2, 3, -5, 6) - (1, -5, 3, 7)] + (-1, -3, -6, 0)$

c) $4[(1, -1, 2, 3) + 4(x, y, z, t)] = -5(2, -6, 3, 1) - [(8, 3, -5, 2) - 2(1, -2, 0, 0)]$

2. Sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

   Suma $(+)$: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

   Multiplicación $(\cdot)$: $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

   Estudiar las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

3. Sobre el conjunto $\mathbb{R}^3$ se definen las siguientes operaciones:

   Suma $(+)$: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

   Multiplicación por escalares $(\cdot)$: $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

   Estudiar las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

4. Sea $C = \{a + b\sqrt{5}/a, b \in \mathbb{R}\}$. Sobre C se definen las siguientes operaciones:

   Suma $(+)$: $(a + b\sqrt{5}) + (a' + b'\sqrt{5}) = a + a' + (b + b')\sqrt{5}$

   Multiplicación por escalares $(\cdot)$: $\lambda(a + b\sqrt{5}) = \lambda a + \lambda b\sqrt{5}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

   Averiguar si la terna $(C, +, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

5. Sea $A = \{(x, y, z)/x, y \in \mathbb{R}\}$. Sobre A se define una suma y una multiplicación por elementos de $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$(x, y, y) + (x', y', y') = (x + x', y + y', y + y')$$
$$\lambda(x, y, y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda y) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

   Averiguar si con las anteriores operaciones A es un espacio vectorial.

2 SUBESPACIOS VECTORIALES

2.1. *Definición.*

Sea **V** un espacio vectorial real. *Una parte W de* **V** *no vacía se dice que es un subespacio vectorial de* **V** *cuando es espacio vectorial respecto de las operaciones definidas en* **V**. Entre los subespacios de **V** están los dos llamados *triviales*: el mismo **V** y el formado por el elemento $\vec{0}$ exclusivamente, $\{\vec{0}\}$.

Los subespacios no triviales de **V** se llaman *subespacios propios.*

Ejemplos:

- Consideremos $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

  Entonces $W_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ y $W_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$ son dos subespacios propios de **V**.

- El subconjunto $W = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial suyo. Las ocho propiedades que definen el espacio vectorial son fáciles de comprobar.

- El subconjunto $W = \{(x, y, 0, t), x, y, t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Es fácil probar que se verifican las ocho propiedades de los espacios vectoriales.

2.2. *Caracterización de los subespacios vectoriales*

Para probar que un subconjunto W no vacío del espacio vectorial **V** es un subespacio de **V**, no es necesario probar que se verifican las ocho propiedades del espacio vectorial, como indica el siguiente

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío W de **V** *sea un subespacio vectorial suyo es que se verifique*:

1) Para todo $\vec{u}$, $\vec{v} \in W$ es también $\vec{u} + \vec{v} \in W$.
2) Para todo $\vec{v} \in W$ y todo número real k sea $k\vec{v} \in W$.

La condición es evidentemente necesaria. Si W es un subespacio vectorial, la adición es una operación interna en W y la multiplicación por escalares da también elementos de W.

La condición es suficiente.

Sea W una parte no vacía de **V** verificando las condiciones 1) y 2).

Los axiomas o propiedades I), II) y IV) se verifican evidentemente. ¿Por qué?

Probemos el axioma III. Para todo $\vec{u} \in W$, $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u} \in W$ por la condición 2). Luego para todo $\vec{u}$ existe $-\vec{u}$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Los axiomas E_2, E_3 y E_4 son triviales.

Por tanto, las condiciones 1) y 2) son suficientes para que un subconjunto no vacío W de **V** sea un subespacio vectorial de **V**.

Las condiciones 1) y 2) se resumen diciendo que *W es estable* para la adición y para la operación externa.

El siguiente teorema reduce a una condición la caracterización de los subespacios vectoriales.

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío W de **V** *sea un subespacio vectorial suyo es que para todo λ y μ de $\mathbb{R}$ y todo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de W se verifique* $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W$. Esta condición es evidentemente necesaria.

¿Por qué? *La condición es suficiente*, pues para $\lambda = \mu = 1$ se tiene la condición 1) del teorema anterior y para $\mu = 0$, $\lambda\vec{u} \in W$, con lo que se verifica la condición 2).

Ejemplos:

- Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea W el subconjunto $W = \{(0, x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

  Probemos que W es un subespacio vectorial. Apliquemos para ello el último teorema.

  Sea $\begin{cases} \vec{u} = (0, x_1) \\ \vec{v} = (0, x_2) \end{cases}$

  Entonces, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda(0, x_1) + \mu(0, x_2) = (0, \lambda x_1) + (0, \mu x_2) = (0, \lambda x_1 + \mu x_2) \in W$.

  Luego W es un subespacio vectorial.

- Sea **V** un espacio vectorial y W_1 y W_2 subespacios de **V**; entonces, $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de **V**. En otras palabras: *la intersección de dos subespacios es un subespacio.*

  En efecto. Como $\vec{0} \in W_1$ y $\vec{0} \in W_2$, $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$; por tanto, $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$

  Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in W_1 \cap W_2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  $$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_1 \text{ y } \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_2, \text{ de donde } \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_1 \cap W_2$$

- La unión de subespacios vectoriales no es, en general, un subespacio.

  En efecto, consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios

  $$W_1 = \{(x, y, z, t)/t = 0\} \text{ y } W_2 = \{(x, y, z, t)/z = 0\}$$

  Entonces $(1, 2, 4, 0) \in W_1$ y $(2, 1, 0, 5) \in W_2$. Sin embargo, el elemento $(1, 2, 4, 0) + (2, 1, 0, 5) = (3, 3, 4, 5)$ no pertenece a W_1 ni a W_2; en consecuencia, no pertenece a $W_1 \cup W_2$; por tanto, por **2.2**, $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial.

- Sea W_n el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ determinado de la siguiente forma:

  $$W_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\}$$

  W_n es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

  En efecto:

  a) $(0, 0, \ldots, 0) \in W_n$, por lo cual $W_n \neq \varnothing$

  b) Siendo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, 0)$ elementos de W_n y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

  $$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) + \mu(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, 0) =$$
  $$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n-1}, 0) + (\mu x'_1, \mu x'_2, \ldots, \mu x'_{n-1}, 0) =$$
  $$= (\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \ldots, \lambda x_{n-1} + \mu x'_{n-1}, 0), \text{ que es un elemento de } W_n.$$

  Por el mismo razonamiento, los subconjuntos

  $$W_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_i = 0\}, \ 1 \leq i \leq n$$

  son también subespacios de $\mathbb{R}^n$.

- Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y en él el subconjunto

  $$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$$

  A es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

  En efecto, $(0, 0, 0, 0) \in A$, de donde $A \neq \varnothing$

  Si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') son elementos de A y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  $$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$$

  Luego $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') =$
  $= \lambda(x + y + z + t) + \mu(x' + y' + z' + t') = 0$, de donde $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in A$.

- El conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo

  $$[1] \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

  En efecto, sea S el conjunto de las soluciones. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son dos soluciones, $\alpha, \beta \in S$, se tiene:

  $$[2] \quad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases} \quad \text{Por ser } \alpha \text{ solución.}$$

  $$[3] \quad \begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n = 0 \end{cases} \quad \text{Por ser } \beta \text{ solución.}$$

Multiplicando las igualdades [2] por λ y las [3] por μ y sumando las primera, segunda, tercera, etc., igualdades de [2] con las primera, segunda, tercera, etc., de [3], respectivamente, se tiene:

$$[4] \quad \begin{cases} a_{11}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) + a_{12}(\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2) + \cdots + a_{1n}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) + a_{m2}(\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2) + \cdots + a_{mn}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0 \end{cases}$$

Las igualdades [4] prueban que:

$$\lambda\alpha + \mu\beta = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1,\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2,\ \ldots,\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$$

es también solución del sistema [1], luego $\lambda\alpha + \mu\beta \in S$ y S es un espacio vectorial.

Ejercicios:

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales.
   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$
   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$
   c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$
   d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0\}$
   e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = 0\}$

2. Demostrar que en el espacio vectorial $\mathbb{R}$ los únicos subespacios existentes son los triviales.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el subconjunto
   $$A = \{x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / ax + by + cz + dt = 0\}$$
   donde a, b, c y d son números reales fijos. Determinar si A es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

4. Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial $\mathbf{V}$
   Sea $W_1 + W_2 = \{\vec{z} \in \mathbf{V} / \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, con $\vec{x} \in W_1$ e $\vec{y} \in W_2\}$.
   Demostrar que $W_1 + W_2$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.

5. Sea W un subespacio de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ y sea $\vec{v} \in \mathbf{V}$ tal que $\vec{v} \notin W$. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda\vec{v} \notin W$.

3 DEPENDENCIA LINEAL

3.1. *Combinaciones lineales.*

Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$, r vectores de un espacio vectorial real $\mathbf{V}$. Todo vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$ que se pueda expresar en la forma

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r, \text{ con } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$$

recibe el nombre de *combinación lineal* de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$.

Ejemplos:

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ el vector (8, 2) es combinación lineal de los vectores (2, 3) y (1, −1), ya que (8, 2) = 2(2, 3) + 4(1, −1).

- En $\mathbb{R}^4$ el vector (−4, 10, −2, 0) es combinación lineal de los vectores (3, −1, 2, 7) y (5, −6, 3, 7) por tenerse (−4, 10, −2, 0) = 2(3, −1, 2, 7) − 2(5, −6, 3, 7).

- El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de todo conjunto de vectores de **V**.

  En efecto, sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ un conjunto de vectores de **V**. La igualdad $0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_r = \vec{0}$ muestra que el vector $\vec{0}$ es una combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$.

3.2. *Vectores linealmente independientes.*

Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ de un espacio vectorial **V** se dice *libre* si la relación $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r = \vec{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

En este caso los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ se dicen *linealmente independientes.*

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ los vectores (5, 0) y (0, 7) son linealmente independientes.

  En efecto:

$$\lambda(5, 0) + \mu(0, 7) = (0, 0) \Rightarrow (5\lambda, 0) + (0, 7\mu) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \\ 7\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

- En $\mathbb{R}^3$ los vectores (1, 0, 0) y (0, 1, 1) son linealmente independientes, ya que:

$$\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda, 0, 0) + (0, \mu, \mu) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$
$$(\lambda, \mu, \mu) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

3.3. *Vectores linealmente dependientes.*

Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ *de un espacio vectorial* **V** *se dice ligado si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, *no todos nulos, tales que* $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r = \vec{0}$.

En este caso los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ se dicen *linealmente dependientes.*

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$ los vectores (3, 1, 2), (0, −2, −2), (2, 2, 0) y (−1, 5, 6) son linealmente dependientes, ya que 2(3, 1, 2) + 2(0, 2, −2) − 3(2, 2, 0) + 0(−1, 5, 6) = (0, 0, 0).

- En $\mathbb{R}^4$ los vectores (1, 2, 3, −1), (2, −2, 6, 4) y (2, 1, 6, 1) son linealmente dependientes, ya que 2(1, 2, 3, −1) − 2(2, 1, 6, 1) + (2, −2, 6, 4) = (0, 0, 0, 0).

3.4. Los siguientes vectores de $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \\ \vec{b} &= (0, b_2, b_3, b_4, b_5) \\ \vec{c} &= (0, 0, c_3, c_4, c_5) \\ \vec{d} &= (0, 0, 0, d_4, d_5) \end{aligned}$$

en donde $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, $d_4 \neq 0$ son linealmente independientes.

En efecto: de la relación $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = \vec{0}$ se deduce:

$\lambda_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + \lambda_2(0, b_2, b_3, b_4, b_5) + \lambda_3(0, 0, c_3, c_4, c_5) + \lambda_4(0, 0, 0, d_4, d_5)$,

y de aquí el siguiente sistema escalonado:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 a_1 &= 0 \\
\lambda_2 b_2 + \lambda_1 a_2 &= 0 \\
\lambda_3 c_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_1 a_3 &= 0 \\
\lambda_4 d_4 + \lambda_3 c_4 + \lambda_2 b_4 + \lambda_1 a_4 &= 0 \\
\lambda_4 d_5 + \lambda_3 c_5 + \lambda_2 b_5 + \lambda_1 a_5 &= 0
\end{aligned}$$

Si $a_1 \neq 0$, de la primera resulta $\lambda_1 = 0$, y llevando este resultado a la segunda se obtiene $\lambda_2 = 0$; con estos dos valores de λ_1 y λ_2 resulta de la tercera $\lambda_3 = 0$. Análogamente resulta $\lambda_4 = 0$.

En general, todo conjunto de n vectores como el dado:

$$\begin{array}{l}
(a_1, \ . \ . \ . \ . \ . \ ) \\
(0, \ b_2, \ . \ . \ . \ . \ ) \\
(0, \ 0, \ c_3, \ . \ . \ . \ ) \\
(0, \ 0, \ 0, \ d_4, \ . \ . \ ) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(0, \ 0, \ 0, \ . \ . \ g_n)
\end{array}$$

en que el primero tiene primera componente distinta de cero, $a_1 \neq 0$, el segundo tiene la primera componente nula y la segunda distinta de cero, $b_2 \neq 0$, el tercero tiene nulas las dos primeras componentes y la tercera distinta de cero, $c_3 \neq 0$, y así sucesivamente los restantes vectores, son linealmente independientes.

Ejercicios:

1. Determinar la expresión general de los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(4, 1, 1)$.
2. Determinar la expresión general de los vectores de $\mathbb{R}^4$ que son combinación lineal de:
   a) el vector $(-1, 2, 3, 1)$ b) los vectores $(3, 1, 0, 5)$ y $(1, 0, 0, -5)$.
3. Sea $\vec{u}$ un vector de un espacio vectorial **V**. Demostrar que $\{\vec{u}\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\vec{u} \neq \vec{0}$.
4. Demostrar que si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\vec{u}_i \neq \vec{0}$, $\forall i$, $1 \leq i \leq r$.
5. En el espacio vectorial $\mathscr{P}(x)$, demostrar que el conjunto de polinomios $\{x, x^2, 3 + x^3\}$ es linealmente independiente.
6. En $\mathbb{R}^2$ demostrar que los vectores $(a, 0)$ y $(0, b)$ son linealmente independientes si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
7. En $\mathbb{R}^3$ demostrar que los vectores $(1, 3, 4)$, $(0, 2, -5)$ y $(0, 0, 6)$ son linealmente independientes.
8. En $\mathbb{R}^4$ demostrar que los vectores $(2, 5, 6, 4)$, $(0, -1, 2, 3)$ y $(0, 0, 1, 6)$ son linealmente independientes.
9. Demostrar que los vectores $(2, 0)$, $(4, 8)$, $(0, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes.

---

4 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL. PROPIEDADES

4.1. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial **V**. *Los vectores de todo subconjunto no vacío de S son también linealmente independientes.*

Para demostrar esta propiedad, consideremos, por comodidad, el subconjunto H formado por los s primeros elementos de S: $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_s\}$, con $s \leq r$

Si los vectores de H fueran linealmente dependientes, existirían escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ no todos nulos para los cuales:

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{u}_s = \vec{0}, \text{ de donde}$$

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{u}_s + 0 \cdot \vec{u}_{s+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_r = \vec{0}$$

igualdad que muestra que los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ son linealmente dependientes, en contra de la hipótesis. En consecuencia, los vectores de H son linealmente independientes.

4.2. *Si $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un conjunto ligado de vectores, entonces para cualesquiera vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ el conjunto $S' = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s\}$ es también ligado.*

Tenemos que demostrar que los vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ son linealmente dependientes. Como los $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ lo son, deben existir escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ no todos cero, tales que $\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r = \vec{0}$. Entonces,

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r + 0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_s = \vec{0}$$

Y como alguno de los λ_i es distinto de cero, los vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ son linealmente dependientes.

4.3. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial **V**.

Los vectores de S son linealmente dependientes si y sólo si al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Demostración

Si los vectores de S son linealmente dependientes, existen escalares no todos nulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ para los cuales $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r = \vec{0}$.

Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$; entonces:

$$\alpha_1\vec{u}_1 = -\alpha_2\vec{u}_2 - \alpha_3\vec{u}_3 - \cdots - \alpha_r\vec{u}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{u}_3 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1}\vec{u}_r$$

Por tanto, $\vec{u}_1$ es una combinación lineal de $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_r$.

Recíprocamente, si un vector de S, por ejemplo el vector $\vec{u}_1$, se puede expresar como combinación lineal de los restantes vectores de S:

$$\vec{u}_1 = \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r, \ \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$$

entonces $1 \cdot \vec{u}_1 - \lambda_2\vec{u}_2 - \lambda_3\vec{u}_3 - \cdots - \lambda_r\vec{u}_r = \vec{0}$

Como al menos el coeficiente de $\vec{u}_1$ es distinto de cero, los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ son linealmente dependientes.

4.4. *Los vectores de todo conjunto que contenga al vector cero son linealmente dependientes.*

En efecto, si $S = \{\vec{0}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ entonces:

$$\vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_r \text{ con } \lambda_1 \neq 0$$

Ejercicios:

1. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial **V**. Determinar si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores de **V** es linealmente independiente, razonando en cada caso la respuesta.

   $A_1 = \{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}\}$ $\quad$ $A_4 = \{\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}, 2\vec{v}\}$

   $A_2 = \{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$ $\quad$ $A_5 = \{6\vec{u} - 7\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u}\}$

   $A_3 = \{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}\}$ $\quad$ $A_6 = \{6\vec{u} - 7\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{v}\}$

2. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial **V**. Justificar la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes subconjuntos de **V**.

   $A_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ $\quad$ $A_3 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}\}$

   $A_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{0}\}$ $\quad$ $A_4 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, 7\vec{u} - 6\vec{v}\}$

5 SISTEMAS DE GENERADORES

5.1. Sea **V** un espacio vectorial real y sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ un conjunto de vectores de **V**. Designemos por $L(S)$ o $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r)$ el conjunto formado por todos los vectores que son combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$, es decir:

$$L(S) = \{\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r),\ \forall\lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Entonces $L(S)$ *es un subespacio vectorial de* **V**.

En efecto, como el cero es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores:

a) $\vec{0} \in L(S)$, y por tanto, $L(S) \neq \varnothing$.

b) Si $\vec{u}$, $\vec{v} \in L(S)$ existen escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$$

para los cuales se tienen

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r \text{ y } \vec{v} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r$$

Por tanto, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\vec{u}_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\lambda\alpha_r + \mu\beta_r)\vec{u}_r$$

Luego $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \in L(S)$.

El subespacio $L(S)$ se denomina *subespacio generado o engendrado por* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$.

Sea **V** un espacio vectorial y W un subespacio. Un conjunto S de vectores de **V**, $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un sistema de generadores W si $L(S) = W$.

Si $W = \mathbf{V}$, S se denomina *sistema de generadores de* $\mathbf{V}$ o simplemente *sistema de generadores.*

Ejemplos:

- Se considera el subespacio $\mathbb{R}^3$.

  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$. Probemos que el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores de W. Basta con probar que todo vector de W se puede expresar como combinación lineal de $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Un vector de W es de la forma $(x, 0, z)$ y se puede expresar como $(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$.

- En $\mathbb{R}^4$ el conjunto $S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 3)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$, ya que $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ se tiene

$$(x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + \frac{z}{2}(0, 0, 2, 0) + \frac{t}{3}(0, 0, 0, 3).$$

5.2. *Sea* $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ *un conjunto de vectores de un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *y sea* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *un vector que es combinación lineal de los* $\vec{u}_i$*; entonces se puede sustituir alguno de los* $\vec{u}_i$ *por* $\vec{v}$ *de forma que el conjunto de vectores resultantes engendre el mismo subespacio que* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$.

En efecto: sea $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m$. Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, alguno de los λ_i debe ser distinto de cero; supongamos que es $\lambda_1 \neq 0$ (si fuese otro el escalar distinto de cero se procedería de la misma forma).

Vamos ahora a demostrar que $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) = L(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$, es decir, que los subespacios engendrados por $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$ y $(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$ son iguales.

Como $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m$, y $\lambda_1 \neq 0$, tenemos:

$$\vec{u}_1 = \lambda_1^{-1}\vec{v} - \lambda_1^{-1}\lambda_2\vec{u}_2, - \ldots - \lambda_1^{-1}\lambda_m\vec{u}_m$$

Sea $\vec{x} \in L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$; entonces:

$$\vec{x} = \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2 + \cdots + \mu_m\vec{u}_m =$$
$$= \mu_1[\lambda_1^{-1}\vec{v} - \lambda_1^{-1}\lambda_2\vec{u}_2 - \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_m\vec{u}_m] + \mu_2\vec{u}_2 + \cdots + \mu_m\vec{u}_m =$$
$$= (\mu_1\lambda_1^{-1})\vec{v} + (\mu_2 - \mu_1\lambda_1^{-1}\lambda_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\mu_m - \lambda_1^{-1}\lambda_m)\vec{u}_m$$

Esta última expresión indica que $\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores $(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$, luego $\vec{x} \in L(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$; por consiguiente:

$$L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) \subset L(\vec{v}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$$

Veamos ahora que el segundo subespacio está contenido en el primero.

Sea $\vec{x} \in L(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$. Entonces:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{v} + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{u}_m = \alpha_1(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m) + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{u}_m =$$
$$= (\alpha_1\lambda_1)\vec{u}_1 + (\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\alpha_1\lambda_m + \alpha_m)\vec{u}_m \in L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$$

Por tanto, $L(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \subset L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$. Así queda probado que

$$L(\vec{v}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$$

Nota: Se puede observar que de esta demostración se sigue que si $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m$ y el escalar $\lambda_i \neq 0$, entonces se puede sustituir $\vec{u}_i$ por $\vec{v}$.

5.3. *Teorema de Steinitz.*

Sea **V** *un espacio vectorial,* $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ *un conjunto de vectores que engendra* **V** *y* $H = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ *un conjunto de vectores linealmente independientes; entonces* $r \leq m$ *y se pueden sustituir los vectores de S por vectores de H de forma que el conjunto resultante siga siendo un sistema de generadores de* **V**.

Observemos en primer lugar que los $\vec{v}_i$ son todos distintos de cero, pues si no H no sería un conjunto de vectores linealmente independientes (ver **4.4**).

Como S es un conjunto de generadores de **V**, $\vec{v}_1$ es una combinación lineal de los $\vec{u}_i$ y, por tanto, por **5.2**, $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ es un sistema de generadores de **V**.

Como S_1 es un conjunto de generadores de **V**, $\vec{v}_2$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$; por ejemplo:

$$\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m$$

Como $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, alguno de los λ_i es distinto de cero; si sucediese $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_m = 0$, entonces $\vec{v}_2 - \lambda_1\vec{v}_1 = \vec{0}$, y los vectores $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$ no serían linealmente independientes. Por tanto, alguno de los λ_i ($i = 2, 3, \ldots, m$) debe ser distinto de cero, por ejemplo λ_2. En virtud de la nota de **5.2**, $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_m\}$ es un sistema de generadores. Continuando el proceso pueden presentarse dos casos: Si $r < m$, entonces, $S_r = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\ \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_m\}$ es un sistema de generadores de **V** y el teorema está demostrado. Del mismo modo si $r = m$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ sería un sistema de generadores de **V**.

No puede ser $r > m$, porque en este caso $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ sería un sistema generador de **V**, con lo cual los vectores restantes $\vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_r$ serían combinaciones lineales de los m primeros, contra la hipótesis de que H era libre.

Por consiguiente, si $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ es un sistema de generadores de M y $H = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ un conjunto de vectores libres, se tiene $r \leq m$.

5.4. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v}\}$ un sistema de generadores de W.

Si $\vec{v} \in S$ *es combinación lineal de los restantes vectores de S y se suprime* $\vec{v}$, *el conjunto* $S' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *resultante es también un sistema de generadores de* W.

En efecto:

Si $\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$

y $\vec{x} \in W$ será $\vec{x} = \beta\vec{v} + \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n$, ya que S es un sistema de generadores de W.

Veamos que también se puede expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de S'. Sustituyendo $\vec{v}$ en la expresión anterior:

$$\vec{x} = \beta[\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n] + \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n =$$

$$= (\beta\alpha_1 + \lambda_1)\vec{u}_1 + (\beta\alpha_2 + \lambda_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\beta\alpha_n + \lambda_n)\vec{u}_n$$

Luego $S' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es un sistema de generadores de W.

6 BASES. DIMENSIÓN

6.1. Sea **V** un espacio vectorial. Un conjunto de vectores $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una *base* de **V** si:

a) *B es un sistema de generadores de* **V**.

b) *Los vectores de B son linealmente independientes.*

Ejemplos:

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ el conjunto de vectores $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$ es, trivialmente, una base de $\mathbb{R}^n$ que recibe el nombre de *base canónica.*
- Los vectores (1, 0), (0, 1) y (4, 3) son un sistema de generadores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, pues todo vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación de (1, 0), (0, 1) y (4, 3):

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(4, 3)$$

Pero estos tres vectores no son linealmente independientes; en efecto, (4, 3) es combinación lineal de (1, 0) y (0, 1):

$$(4, 3) = 4(1, 0) + 3(0, 1)$$

6.2. *Para que un conjunto de vectores* $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ *sea una base, es necesario y suficiente que todo vector de* **V** *se pueda escribir de forma única como combinación lineal de los vectores de B.*

Supongamos B base y sea $\vec{x}$ un vector de **V**. Entonces por ser B un sistema de generadores de **V**, $\vec{x}$ se puede escribir como combinación lineal de los $\vec{u}_i$, es decir, $\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r$. Veamos que esta expresión es única; supongamos

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r = \mu_1\vec{u}_1 + \cdots + \mu_r\vec{u}_r$$

Entonces, restando: $(\lambda_1 - \mu_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)\vec{u}_r = \vec{0}$, y como los $\vec{u}_i$ son linealmente independientes:

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0,\ \lambda_2 - \mu_2 = 0,\ \ldots,\ \lambda_r - \mu_r = 0$$

De donde $\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \ldots,\ \lambda_r = \mu_r$.

Recíprocamente, si todo vector es combinación lineal de los $\vec{u}_i$, B es un sistema de generadores. Veamos que los $\vec{u}_i$ son linealmente independientes.

Sea $\vec{0} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r$. Como $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + \cdots + 0\vec{u}_r$, entonces por la unicidad, el $\vec{0}$ se puede escribir como combinación lineal de los $\vec{u}_i$ de una sola forma válida. Luego $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_r = 0$.

De lo anteriormente dicho, si $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base y $\vec{x} \in \mathbf{V}$, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ únicos tales $\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_i + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r$. Estos escalares se llaman las *coordenadas de* $\vec{x}$ *respecto de la base B.*

Ejemplos:

- Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Si $\vec{v} = (x, y, z)$ es un elemento de $\mathbb{R}^3$, x, y, z son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, ya que:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

- Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la base $B = \{(2, 0), (0, 3)\}$.

  Si $\vec{v} = (x, y)$ es un elemento de $\mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \frac{x}{2}(2, 0) + \frac{y}{3}(0, 3)$$

  Por tanto, las coordenadas de $\vec{v}$ con respecto a la base B son $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{3}$, respectivamente.

  En cambio, las coordenadas de $\vec{v} = (x, y)$ respecto de la base canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ son x e y, $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

6.3. *Teorema de la base.*

Sea **V** un espacio vectorial y sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ dos bases de **V**; entonces, $r = n$.

En efecto, los vectores de B' son linealmente independientes; por tanto, $r \leq n$, ya que B es una base y, por tanto, un sistema de generadores (teorema de Steinitz). Recíprocamente, los vectores de B son linealmente independientes; por tanto, $n \leq r$, ya que B' es una base y, por tanto, un sistema de generadores. En consecuencia, $r = n$.

La anterior propiedad pone de manifiesto el hecho de que si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de un espacio vectorial **V**, *toda otra base de* **V** *tiene exactamente n elementos.*

De aquí la siguiente definición:

Si **V** *es un espacio vectorial y* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *una base de* **V**, *el número de elementos de B, n, se dice que es la dimensión de* **V** *y se escribe* $\dim \mathbf{V} = n$.

Ejemplo:

- El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es de dimensión 2, ya que su base canónica consta de dos elementos (1, 0) y (0, 1).

  En general, el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es de dimensión n, ya que su base canónica consta de n elementos.

6.4. Sea **V** un espacio vectorial real y $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ *un conjunto de vectores* linealmente independientes. *El conjunto B es una base si y sólo si para todo conjunto* $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$ *de vectores linealmente independientes de* **V** *se verifica* $s \leq r$.

Demostración

Si B es una base, entonces $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un sistema de generadores, y por el teorema de Steinitz, $s \leq r$, ya que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$ son linealmente independientes.

Recíprocamente, supongamos que para todo conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$ de vectores linealmente independientes se verifica $s \leq r$. Hemos de probar que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base, para lo cual basta probar que B es un sistema de generadores.

Sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de **V**. El conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r, \vec{x}\}$ es un conjunto ligado de vectores; en consecuencia se tiene una relación de la forma

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r + \lambda\vec{x} = 0,$$

con no todos los coeficientes nulos.

Pero λ no puede ser cero, pues en tal caso sería $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r = 0$, siendo no nulos todos los λ_i, y esto está en contradicción con el hecho de ser los vectores de B linealmente independientes.

Por tanto, $\vec{x} = -\lambda^{-1}\lambda_1\vec{u}_1 - \cdots - \lambda^{-1}\lambda_r\vec{u}_r$, es decir, todo vector de **V** es combinación lineal de los vectores de B.

6.5. Sea **V** un espacio vectorial real, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ un sistema de generadores de **V**. El conjunto B es una base de **V** si y sólo si para todo conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$ de generadores de **V** se verifica $s \geq r$.

Demostración

Si B es una base, entonces $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, y por el teorema de Steinitz $s \geq r$.

Recíprocamente, supongamos que para todo sistema de generadores de **V** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$ se verifica $s \geq r$. Hemos de probar que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base de **V**, para lo cual basta probar que los vectores de B son linealmente independientes.

Si los vectores de B no fueran linealmente independientes, se podría escribir una relación de la forma:

$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{u}_r = \vec{0}$, con no todos los λ_i nulos. Supongamos que $\lambda_1 \neq 0$; entonces sería $\vec{u}_1 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{u}_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_r}{\lambda_1}\vec{u}_r$, con lo que el vector $\vec{u}_1$ de B sería combinación lineal de los restantes vectores de B, y por el teorema **5.4** se podría suprimir y los $s = r - 1$ vectores $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_r\}$ sería otro sistema de generadores de **V**; pero esto es una contradicción con el supuesto de que $s \geq r$.

De estos dos teoremas se deduce:

Si W es un subespacio vectorial de **V**:

a) *Si* $\dim W = r$, *todo conjunto de r vectores linealmente independientes de W es una base de W.*

b) *La dimensión de un subespacio vectorial de* **V** *es igual al máximo número de vectores linealmente independientes de W.*

Ejercicios:

1. Demostrar que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

2. En $\mathbb{R}^2$ demostrar que los vectores $(1, b)$ y $(1, c)$ constituyen una base si y sólo si $b \neq c$.

3. Determinar el vector de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto a la base $B = \{(2, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -1)\}$ son:

   a) 3, 1 y 5
   b) -6, 3 y -2
   c) -5, -4 y 6
   d) 3, -1 y 0

---

7 RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

7.1. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores y sea $W = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ un subespacio engendrado por S.

Se llama rango del conjunto S, y lo representaremos por $rg(S)$, a la dimensión del subespacio W engendrado por S, es decir, $rg(S) = dim W$,

Por lo dicho en **6.5**, resulta que $rg(S)$ = *máximo número de vectores linealmente independientes de S.*

7.2. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores que engendran el subespacio vectorial W, es decir:

$W = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) = L(S)$ y sea S' el conjunto obtenido al aplicar a S las siguientes transformaciones de Gauss:

a) Cambiar el orden de los vectores de S.

b) Multiplicar un vector de S por un número real distinto de cero.

c) Suprimir un vector de S que sea combinación lineal de los demás.

d) Sustituir un vector por la suma de él más otro multiplicado por un número real cualquiera.

e) Sustituir un vector por una combinación lineal de él y los restantes siempre que el coeficiente del vector sustituido sea distinto de cero.

Entonces:

I) S' engendra el mismo subespacio W.

II) Rango de S' = rango de S.

Demostremos el teorema para la transformación d), que es la que más se utiliza en el cálculo del rango de un conjunto de vectores y, como veremos, en el cálculo del rango de una matriz.

Si en $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{u}_n\}$ se sustituye $\vec{u}_i$ por $\vec{v}_i = \vec{u}_i + \lambda\vec{u}_1$ se tiene el conjunto $S' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Demostración de I

Probemos que $W = L(S) = L(S')$.

$$\text{Si } \vec{x} \in L(S) \Rightarrow \vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_i\vec{u}_i + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n \Rightarrow$$
$$\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_i(\vec{v}_i - \lambda\vec{u}_1) + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_i\lambda)\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_i\vec{v}_i + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n \Rightarrow \vec{x} \in L(S')$$

Recíprocamente, si $\vec{x} \in L(S') \Rightarrow \vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_i\vec{v}_i + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n \Rightarrow$
$$\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_i[\vec{u}_i + \lambda\vec{u}_1] + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_i\lambda)\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_i\vec{u}_i + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n \Rightarrow \vec{x} \in L(S)$$

Demostremos II

Como ambos conjuntos S y S' engendran el subespacio de W, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \text{rg}(S) = \dim W \\ \text{rg}(S') = \dim W \end{array}\right\}$$

luego: $\text{rg}(S) = \text{rg}(S')$.

La transformación demostrada permite pasar de un conjunto de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ a otro $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, que tiene el mismo rango, haciendo

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_1 + \lambda_1 \vec{u}_1 \\ \vec{v}_3 &= \vec{u}_2 + \lambda_2 \vec{u}_1 \\ &\vdots \\ \vec{v}_n &= \vec{u}_n + \lambda_{n-1} \vec{u}_1 \end{aligned}$$

Aplicando reiteradamente este método, llamado *método de reducción en cascada*, se extrae fácilmente de S un conjunto S' de vectores linealmente independientes y que tiene el mismo rango que S.

Ejemplos:

- Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ y sea H el subespacio engendrado $H = L(S)$.

  $$\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1),\ \vec{u}_2 = (2, 1, 0, 3),\ \vec{u}_3 = (1, -1, 3, 2),\ \vec{u}_4 = (4, 1, 2, 5)$$

  Aplicando el método de cascada resulta:

  $$\begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{u}_2 = (2, 1, 0, 3) \\ \vec{u}_3 = (1, -1, 3, 2) \\ \vec{u}_4 = (4, 1, 2, 5) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1 = (0, 1, -2, 1) \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \vec{u}_1 = (0, -1, 2, 1) \\ \vec{v}_4 = \vec{u}_4 - 4\vec{u}_1 = (0, 1, -2, 1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{w}_2 = \vec{v}_2 = (0, 1, -2, 1) \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = (0, 0, 0, 2) \\ \vec{w}_4 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2 = (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

  Los tres conjuntos de vectores

  $$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\},\ \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\},\ \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$$

  engendran el mismo subespacio H y tienen, por consiguiente, el mismo rango.

  Como los vectores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ son linealmente independientes, son una base del subespacio engendrado por S'. Por tanto:

  1) El rango de S es 3; $\text{rg}(S) = 3$
  2) La dimensión de H es 3; $\dim(H) = 3$
  3) Una base de H es $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -2, 1), (0, 0, 0, 2)\}$

- Sea el conjunto de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$.

  $$\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 0),\ \vec{u}_2 = (2, -1, 0, 1),\ \vec{u}_3 = (5, -1, 2, 2),\ \vec{u}_4 = (3, 0, 2, 1)$$

  y H el subespacio engendrado por S.

  Hallar:

  a) El rango de S.
  b) Una base de H.
  c) Ecuaciones paramétricas del subespacio H.
  d) Averiguar si el vector $\vec{x} = (2, 11, 16, -3)$ pertenece al subespacio H.

Solución

a) Aplicando el método de reducción en cascada se obtienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{lll} \vec{u}_1 = (1,1,2,0) & \vec{v}_1 = (1,1,2,0) & \vec{w}_1 = (1,1,2,0) \\ \vec{u}_2 = (2,-1,0,1) \Rightarrow & \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1 = (0,-3,-4,1) \Rightarrow & \vec{w}_2 = \vec{v}_2 = (0,-3,-4,1) \\ \vec{u}_3 = (5,-1,2,2) & \vec{v}_3 = \vec{u}_3 - 5\vec{u}_1 = (0,-6,-8,2) & \vec{w}_3 = \vec{v}_3 - 2\vec{v}_2 = (0,0,0,0) \\ \vec{u}_4 = (3,0,2,1) & \vec{v}_4 = \vec{u}_4 - 3\vec{u}_1 = (0,-3,-4,1) & \vec{w}_4 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2 = (0,0,0,0) \end{array}$$

Los vectores $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ son linealmente independientes, y lo mismo sucede con los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y, por tanto, con los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. Por tanto, $\text{rg}(S) = 2$.

b) Una base de H es $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1, 1, 2, 0), (0, -3, -4, 1)\}$

c) Si (x_1, x_2, x_3, x_4) es un vector cualquiera de H, se podrá obtener como combinación lineal de los vectores de la base:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \lambda(1, 1, 2, 0) + \mu(0, -3, -4, 1)$, de donde:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda - 3\mu \\ x_3 = 2\lambda - 4\mu \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

Al tomar λ y μ todos los valores posibles se obtienen todos los vectores de H.

Estas cuatro ecuaciones se llaman ecuaciones paramétricas del subespacio H.

d) Si el vector $\vec{x} = (2, 11, 16, -3)$ pertenece al subespacio H se podrá expresar como combinación lineal de los vectores de la base, o también, sustituyendo en las ecuaciones paramétricas, debe haber un valor de λ y otro de μ que satisfaga a las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 = \mu \\ 11 = \lambda - 3\mu \\ 16 = 2\lambda - 4\mu \\ -3 = \mu \end{cases}$$

Los valores $\lambda = 2$, $\mu = -3$ satisfacen las cuatro ecuaciones; por consiguiente, el vector $\vec{x} \in H$, y será $\vec{x} = 2\vec{w}_1 - 3\vec{w}_2$.

- El rango de un conjunto arbitrario de vectores de $\mathbb{R}^2$ es siempre menor o igual que 2.
- El rango de un conjunto arbitrario de vectores de $\mathbb{R}^n$ es siempre menor o igual que n.
- Si el rango de un conjunto C de vectores de $\mathbb{R}^n$ es n, C es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$.
- Sea $\vec{v}$ un vector de un espacio vectorial **V**. Entonces $\text{rg}\{\vec{v}\} = 1$ si y sólo si $\vec{v} \neq 0$.

EJERCICIOS FINALES

1. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$; determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^5$ son subespacios.

   a) $A_1 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 / x = 2y + z\}$

   b) $A_2 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 / x = 0\}$

   c) $A_3 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 / t + u = 0\}$

   d) $A_4 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 / z = t + 2\}$

   e) $A_5 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 / z = t^2 + n^2\}$

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el vector $\vec{v} = (-1, 5, 2, 0)$. Determinar:

   a) Si $\vec{v} \in L((2, 5, 3, 1), (-2, 3, 5, 0))$

   b) Si $\vec{v} \in L((-1, 2, 3, 0), (4, 3, 0, 1), (0, 3, 2, 0))$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases:

   $B_1 = \{(-1, 5, 0), (4, 1, 3), (0, 1, 0)\}$ $\quad$ $B_3 = \{(2, 7, 0), (0, 0, 5), (0, 0, 3)\}$

   $B_2 = \{(-1, 3, 2), (2, 3, -1), (4, 0, 3)\}$ $\quad$ $B_4 = \{(-1, 2, 3), (-2, 1, 6), (5, 2, -15)\}$

4. Determinar el rango de los siguientes conceptos de vectores de $\mathbb{R}^6$:

   $A_1 = \{(-1, 2, 0, 0, 1, 2), (2, 5, -3, 0, 0, 0), (1, 5, 0, 0, 0, 0)$

   $A_2 = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 0), (-1, 3, 1, 5, 0, 1)\}$

   $A_3 = \{(4, 2, 0, 1, 0, 5), (-2, 0, 1, 2, 3, 0), (-2, -2, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 3, 3, 5)\}$

5. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes y tales que

   $\forall \vec{u} \in \mathbf{V}$, $C' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{u}\}$ es linealmente dependiente.

   Demostrar que C es una base de $\mathbf{V}$.

6. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y B una base de $\mathbf{V}$. Demostrar que todo subconjunto C de $\mathbf{V}$ tal que $B \subset C$ es un sistema de generadores de $\mathbf{V}$.

7. Sea $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
   Hallar las ecuaciones paramétricas de $L(S)$.

8. Probar que el subespacio engendrado por $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3, 2)$ es el mismo que el engendrado por $\vec{a}$ $(1, 1, 0)$ y $\vec{b} = (3, 8, 5)$.

9. Calcular x e y para que los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes sean linealmente dependientes.
   $\vec{u}_1 = (5, x, -4, -3)$; $\vec{u}_2 = (1, 0, x, 1)$; $\vec{u}_3 = (-1, y, -1, 3)$.

10. Determinar x para que el vector $(-1, 2, 5, x)$ pertenezca al subespacio engendrado por los vectores $(4, -2, 1, 7)$ y $(1, 0, 2, 4)$.

11. Demostrar que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ el subespacio engendrado por los vectores $(2, 5, 3)$ y $(0, -1, -1)$ es el mismo que el subespacio engendrado por $(4, 9, 5)$ y $(2, 7, 5)$.

TEMA 3
MATRICES Y APLICACIONES LINEALES

El lector ya ha tenido en el primer tema la oportunidad de comprobar la conveniencia de utilizar las matrices por la simplificación que introduce en los cálculos. En este mismo libro tendremos ocasión de ver que el estudio de las matrices es muy útil en álgebra y en geometría.

Las operaciones entre matrices se pueden definir derivándolas de las operaciones con aplicaciones lineales, pero, aparte de su poca utilidad en este curso, nos ha parecido más didáctico a este nivel definir las operaciones con matrices directamente sin subordinarlas a las aplicaciones lineales.

1 MATRICES DE NÚMEROS REALES. DEFINICIONES

1.1. Consideremos el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Una tabla de $m \times n$ números dispuestos en m filas y n columnas de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de *matriz de orden $m \times n$ de números reales.*

En una matriz el elemento a_{ij} ocupa el lugar determinado por la fila i y la columna j.

Abreviadamente, una matriz como la anterior se designa también por

$$(a_{ij}) \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

Nota: Cuando hablemos de una matriz A de orden $m \times n$ escribiremos simplemente $A = (a_{ij})$, sobreentendiéndose que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$.

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se representa por

$$\mathcal{M}_{m,n} \quad \text{o bien} \quad \mathcal{M}_{m \times n}$$

Si en una matriz el número de filas, n, es igual al número de columnas, se dice que es una matriz cuadrada de orden n. Cuando esto no ocurre se dice que la matriz es rectangular. El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n se designa por $\mathcal{M}_{n,n}$, o bien simplemente por $\mathcal{M}_n$.

Ejemplos:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. A es una matriz de orden 3×4.

- Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  B y C son dos matrices cuadradas de orden 3.

- Sean $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $E = (5 \quad -1 \quad 2 \quad 3)$.

  D es una matriz de orden 4×1 y se dice que es una matriz columna.
  E es una matriz de orden 1×4 y se dice que es una matriz fila. En estos dos casos, se trata de vectores de $\mathbb{R}^4$.

- Veremos más adelante que dada una matriz cualquiera A, es conveniente considerar independientemente sus filas o columnas como otras tantas matrices o vectores.

  Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

  los vectores fila de A los designaremos por

$$A_1 = (1, 2, 3, -1),\ A_2 = (1, 0, 1, 2),\ A_3 = (-4, 1, 0, 3)$$

  y los vectores columnas de A por

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix};\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.2. *Igualdad de matrices.* Dos matrices A y B de orden $m \times n$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ son iguales si lo son los elementos que ocupan las mismas posiciones, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall_{ij}$.

1.3. *Matriz traspuesta.* Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, se llama *traspuesta de* A, y la representaremos por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas:

La primera fila de A es la primera columna de A^t.

La segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc.

Ejemplos:

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $B = (1 \quad -1 \quad 2)$, entonces $B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.4. *Matriz simétrica.* Una matriz cuadrada de orden n se dice *simétrica* si coincide con su traspuesta.

Ejemplo:

- Las matrices $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ son simétricas.

1.5. *Matriz diagonal y matriz unidad.*

En una matriz cuadrada A de orden n, la *diagonal principal* está formada por los elementos que tienen los subíndices iguales $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{mn}$. Al conjunto formado por los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$ de la matriz A se le llama *diagonal secundaria.*

Ejemplo:

- En la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se tiene:

diagonal principal $= \{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$; diagonal secundaria $= \{a_{13}, a_{22}, a_{33}\}$

Una matriz cuadrada se dice *triangular* cuando los términos por encima o por debajo de la diagonal principal son todos cero.

Una matriz *diagonal* es una matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son todos cero. Casos particulares de la matriz diagonal son las matrices *escalares*, que tienen iguales todos los elementos de la diagonal principal, y entre las escalares la matriz unidad, cuya diagonal principal está formada por unos.

Ejemplo:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{}\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{}\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz unidad}}}_{\text{matrices escalares}}}_{\text{matrices diagonales}}$$

Ejercicios:

1. Expresar mediante la tabla correspondiente cada una de las siguientes matrices:

$$A = (a_{ij}) \begin{matrix} 1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 4 \end{matrix} \text{ siendo } a_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i \ge j \\ -1 \text{ si } i < j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij}) \begin{matrix} 1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3 \end{matrix} \text{ siendo } b_{ij} = \begin{cases} 4 \text{ si } 1 + j > 3 \\ -4 \text{ si } i + j \le 3 \end{cases}$$

2. Determinar la matriz traspuesta de cada una de las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Demostrar que $(A^t)^t = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

---

2 EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES DE ORDEN $m \times n$

2.1. En el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$ se define la suma del modo siguiente:

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, son dos matrices $m \times n$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22} \dots b_{2n} \\ \vdots \\ b_{m1}\ b_{m2} \dots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}\ a_{12}+b_{12} \dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21}\ a_{22}+b_{22} \dots a_{2n}+b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}\ a_{m2}+b_{m2} \dots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la suma $A + B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices.

El producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ se representa por $\lambda \cdot A$ o λA y se define por

$$\lambda A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz λA se obtiene multiplicando por λ cada elemento de la matriz A.

Ejemplos:

- Suma en $\mathcal{M}_{2\times 4}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 12 & 12 \\ 2 & -5 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

- Producto de una matriz de $\mathcal{M}_{2\times 4}$ por un escalar

$$3\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 9 & 3 & 18 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. La suma de matrices de orden $m \times n$ tiene las siguientes propiedades cuya demostración es inmediata:

a) *Asociativa.* $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

b) *Elemento neutro.* La matriz *cero*, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, de orden $m \times n$, que tiene todos sus elementos iguales a cero, es el elemento neutro de la suma de matrices, ya que $A + 0 = 0 + A = A$.

c) *Elemento opuesto.* Toda matriz $A = (a_{ij})$ tiene una opuesta $-A$ que se obtiene cambiando de signo los elementos de A: $-A = (-a_{ij})$.

En efecto, $-A$ es opuesto de A, ya que se verifica $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

d) *Conmutativa.* Para dos matrices cualesquiera A y B de orden $m \times n$, se verifica $A + B = B + A$.

2.3. El producto de escalares por matrices de orden $m \times n$ tiene las siguientes propiedades:

a) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

c) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

d) $1 \cdot A = A \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Por cumplir las propiedades de **2.2** y **2.3** se dice que $\mathcal{M}_{m \times n}$ es un espacio vectorial.

Ejemplo:

- $$-2\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 4 & -1 \\ 8 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 12 & 0 & -8 & 2 \\ -16 & 12 & -4 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 12 & -3 & -7 & 0 \\ -16 & 8 & -10 & -8 & -1 \\ -6 & -4 & -5 & -6 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 & 7 & 0 \\ 16 & -8 & 10 & 8 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. Determinar la matriz A en cada uno de los siguientes casos:

a) $$A = 7\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 6\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

b) $$14A = 3\left[\begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + 6\begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $$A - 2\begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \left[5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

2. Demostrar que la traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

y que $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

3. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demostrar que:

a) La matriz $B = A + A^t$ es una matriz simétrica.

b) La matriz $C = A - A^t$ verifica que $C^t = -C$ (una matriz de este tipo se dice antisimétrica).

c) Probar que si $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $H = \frac{1}{2}(A - A^t)$, entonces $S + H = A$.

(Esto prueba que una matriz A se puede descomponer en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.)

4. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar:

a) $A^t + 6B + 3C^t$
b) $(A - C)^t + 7B - 6B^t$
c) $7A - 2C + 3(6A^t - 2B)$
d) $A - A^t - 3(B + C^t)$
e) $7C - 6(B - 3C)^t$
f) $(4A - 6B - 3C)^t$

3 PRODUCTO DE MATRICES

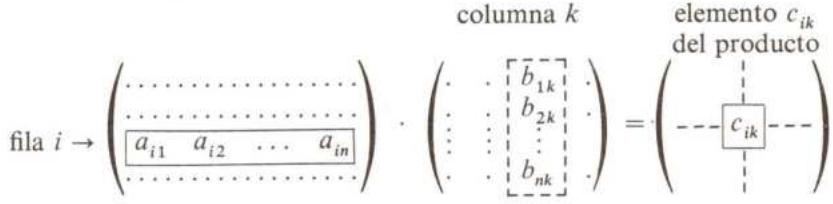
3.1. Dadas dos matrices A y B, diremos que son *multiplicables* en este orden, y se escribe $A \cdot B$ o AB, si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Si se verifica esta condición y $A = (a_{ij})$ es de orden $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ de orden $n \times p$, la matriz producto $C = A \cdot B$ es de orden $m \times p$, $C = (c_{ik})$, y el elemento c_{ik} viene definido por

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Es decir:

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk}$$

El elemento c_{ik} de la matriz producto viene dado por el producto de la fila i de la matriz A por la columna k de la matriz B, como se indica en el siguiente esquema.



Ejemplos:

- Vamos a calcular el producto $A \cdot B$ de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Como la matriz A es de orden 2×2 y la matriz B de orden 2×3, la matriz producto C tendrá el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, es decir, será de orden 2×3.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Calculemos los elementos c_{ij} de la matriz producto: c_{11} es el producto de la primera fila de A por la primera columna de B:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

c_{12} es el producto de la primera fila de A por la segunda columna de B:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

c_{13} es el producto de la primera fila de A por la segunda columna de B:

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}$$

Análogamente se obtienen los elementos c_{21}, c_{22}, c_{23}:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \; ; \; c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \; ; \; c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$$

- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 & -1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 3\cdot 5 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 4\cdot(-3) + 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ -1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 2 & -1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 13 & -1 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

- Sea $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este último ejemplo se observa que el producto de dos matrices puede ser cero sin que ninguna de ellas sea la matriz cero.

3.2. El producto de matrices *no es conmutativo*. Si A y B son dos matrices tales que $A \cdot B$ y $B \cdot A$ están definidas, en general, se tiene que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Así, por ejemplo, sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Obviamente, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3.3. El producto de matrices *es asociativo*. Si A, B y C son tres matrices tales que $A \cdot (B \cdot C)$ está definida, entonces $(A \cdot B) \cdot C$ también lo está, y se tiene: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Ejemplo:

- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = (5 \quad 6)$

Entonces, $B \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}$ y $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ -25 & -30 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ -25 & -30 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

3.4. El producto de matrices tiene la *propiedad distributiva* con respecto a la suma. Si A, B y C son tres matrices tales que $A \cdot (B + C)$ está definida, se verifica que $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Esta propiedad se basa en la propiedad distributiva de los números reales con respecto a la suma y su demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo:

- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 \\ 4 & 9 & 33 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 12 \\ 5 & 8 & 18 \end{pmatrix}; \; A \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 \\ 4 & 9 & 33 \end{pmatrix}$$

3.5. En el conjunto $\mathcal{M}_n$ de las matrices cuadradas de orden n, la matriz

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

es el elemento unidad (neutro) para el producto, ya que obviamente si $A \in \mathcal{M}_n$,

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

I se denomina *matriz unidad* de orden n.

La matriz unidad de orden n también se escribe I_n.

3.6. Sea A una matriz cuadrada de orden n; si existe otra matriz cuadrada de orden n, B, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, se dice que la matriz A es *regular o inversible*, y la matriz B se llama *inversa* de A y se representa por A^{-1}.

La inversa de una matriz cuadrada A es única. En efecto, si B y C fueran matrices inversas de A se tendría:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = B \cdot A = I \\ A \cdot C = C \cdot A = I \end{array}\right\} \text{ luego } A \cdot B = A \cdot C \quad [1]$$

Multiplicando por C en la igualdad [1] por la izquierda queda:

$$C \cdot (A \cdot B) = C \cdot (A \cdot C), \text{ luego } (C \cdot A) \cdot B = (C \cdot A) \cdot C, \text{ es decir,}$$
$$I \cdot B = I \cdot C, \text{ de donde } A = C$$

Ejemplos:

- Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$, ya que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es inversible, ya que siendo a, b, c y d números reales arbitrarios,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

   Determinar:

   a) $A \cdot B \cdot C$ b) $A \cdot (B + C)$ c) $A \cdot (B + C^t)$
   d) $B \cdot C \cdot A^t$ e) $(B - C) \cdot A^t$ f) $(7B - 6C) \cdot A^t$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar A^2, A^3 y A^n, con $n \geq 4$.

3. Sea $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular: a) B^2, b) B^3 y c) $B^3 - 7B^2 + 5B + 4I$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar A^2, A^3 y $A^3 - A \cdot A^t$.

5. Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar C^n, $n \geq 2$.

6. Sea A una matriz de orden $m \times n$ y B una matriz de orden $n \times p$.

   Demostar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

   Es decir, que la traspuesta de un producto es igual al producto de la traspuesta cambiando el orden.

7. Sea A una matriz de orden $n \times n$. Demostrar que $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$.

8. Siendo A una matriz arbitraria, demostrar que las matrices $A^t \cdot A$ y $A \cdot A^t$ son simétricas.

---

4 RANGO DE UNA MATRIZ

4.1. Dada una matriz A de números reales de orden $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se puede interpretar la matriz como n vectores columna (que son las n columnas) o como m vectores fila (que son las m filas) pertenecientes, respectivamente, a los espacios vectoriales $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$.

Los vectores fila y los vectores columna los designaremos como sigue:

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \qquad A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \qquad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

4.2. Sea A una matriz de orden $m \times n$. *Se define el rango de A, $rg(A)$, como el rango del conjunto de sus vectores filas.*

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

Se puede demostrar que el rango de una matriz A es igual al rango del conjunto de sus vectores columnas:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\{A^1, A^2, \dots, A^n\}$$

En consecuencia, para determinar el rango de una matriz se puede utilizar indistintamente el conjunto de sus vectores fila o el conjunto de sus vectores columna.

4.3. *Dos matrices de orden $m \times n$, A y B, se dicen equivalentes si tienen el mismo rango.* Si A y B son equivalentes escribiremos $A \sim B$.

Tal como se ha demostrado en el tema 2, un método para determinar el rango de una matriz es aplicar a sus *vectores fila* (columna) el método de reducción en cascada, obteniendo de esta forma, en cada paso, matrices equivalentes a la inicial.

Ejemplos:

- La matriz unidad de orden n, I, tiene rango n, ya que sus vectores fila constituyen la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, ya que sus vectores fila son linealmente independientes.

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

El rango de la matriz A es como máximo 4, ya que tiene cuatro columnas. Sumando a la segunda, tercera, cuarta y quinta filas la primera multiplicada por -2, -5, -4 y -3, respectivamente, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Ejercicio:

Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5 APLICACIONES LINEALES

5.1. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ dos espacios vectoriales reales. Una aplicación $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ recibe el nombre de aplicación lineal u homomorfismo de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}'$ si

1.º) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\ \vec{v} \in \mathbf{V}$

2.º) $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in \mathbf{V}$

Si $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$, f se denomina *transformación lineal de* $\mathbf{V}$, o *endomorfismo de* $\mathbf{V}$.

Si $\mathbf{V}' = \mathbb{R}$, f se denomina *forma lineal de* $\mathbf{V}$.

Nota. En adelante, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ representan dos espacios vectoriales reales. Al escribir $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ entenderemos que se trata de una aplicación entre espacios vectoriales.

Ejemplos:

- La aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 2x + y$ es una aplicación lineal:

  1.º Para cualquier par de elementos (x, y, z), (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$.

  $$f[(x, y, z) + (x', y', z')] = f(x + x', y + y', z + z') = 2(x + x') + y + y' =$$
  $$= 2x + 2x' + y + y' = (2x + y) + (2x' + y') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

  2.º) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene:

  $$f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 2(\lambda x) + \lambda y = \lambda(2x) + \lambda y = \lambda(2x + y) = \lambda f(x, y, z)$$

- Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (3x - 5y, 0)$. Veamos que g es una aplicación lineal.

  1.º) $g((x, y) + (x', y')) = g(x + x', y + y') = (3(x + x') - 5(y + y'), 0) =$
  $$= (3x + 3x' - 5y - 5y', 0) = (3x - 5y, 0) + (3x' - 5y', 0) = g(x, y) + g(x', y')$$

  2.º) $g((\lambda(x, y)) = g(\lambda x, \lambda y) = (3(\lambda x) - 5(\lambda y), 0) = (\lambda(3x - 5y), 0) = \lambda(3x - 5y, 0) = \lambda g(x, y)$

- Sea $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $h(x, y, z) = (x + y, z + 1)$. Veamos que h no es una aplicación lineal. En efecto:

  $$h[(x, y, z) + (x', y', z')] = h(x + x', y + y', z + z') = ((x + x') + (y + y'), (z + z') + 1) =$$
  $$= (x + y + x' + y', z + z' + 1)$$

  Por otra parte:

  $$h(x, y, z) + h(x', y', z') = (x + y, z + 1) + (x' + y', z' + 1) = (x + y + x' + y', z + z' + 2)$$

  Por tanto, se tiene que, en general,

  $h[(x, y, z) + (x', y', z')] \neq h(x, y, z) + h(x', y', z')$, y por tanto, h no es una aplicación lineal.

5.2. *La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ sea una aplicación lineal es que para todo par de números reales λ, μ y todo par de vectores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbf{V}$ se verifique*: $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

En efecto:

Si f es una aplicación lineal,

$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f(\lambda\vec{u}) + f(\mu\vec{v})$, por la primera condición de **5.1.**

Por otra parte,

$f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ y $f(\mu\vec{v}) = \mu f(\vec{v})$, por la segunda condición de **5.1.**

Por tanto,

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f(\lambda\vec{u}) + f(\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

Recíprocamente, si f es una aplicación que verifica

$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$, $\forall\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\forall\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbf{V}$

también será cierta para $\lambda = \mu = 1$. Entonces:

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(1\vec{u} + 1 \cdot \vec{v}) = 1 \cdot f(\vec{u}) + 1 \cdot f(\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$, que es la primera condición de **5.1.**

Por otra parte, $f(\lambda\vec{u}) = f(\lambda\vec{u} + 0 \cdot \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + 0 \cdot f(\vec{v}) = \lambda f(\vec{u})$.

Al cumplirse las dos condiciones de **5.1**, f es una aplicación lineal.

5.3. Si f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ es una aplicación lineal se verifica:

a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

b) $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

c) $f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \lambda_n f(\vec{v}_n)$

Es decir, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{v}_i)$

En efecto:

a) Si $\vec{u} \in \mathbf{V}$, $f(\vec{u}) = f(\vec{u} + \vec{0}) = f(\vec{u}) + f(\vec{0})$. Luego $f(\vec{0}) = \vec{0}$

b) $f(-\vec{u}) = f[(-1) \cdot \vec{u}] = (-1) \cdot f(\vec{u}) = -f(\vec{u})$

c) $f[\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n] = f(\lambda_1\vec{v}_1) + f(\lambda_2\vec{v}_2) + \cdots + f(\lambda_n\vec{v}_n) =$
$= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \lambda_n f(\vec{v}_n)$

En los siguientes ejemplos se muestran algunas aplicaciones lineales importantes.

Ejemplos:

- Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ dos espacios vectoriales. La aplicación: θ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, $\vec{u} \rightsquigarrow \vec{0}$

  es una aplicación lineal que recibe el nombre de *aplicación cero* de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}'$.

  En efecto, $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$
  $\theta(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \vec{0} = \lambda\theta(\vec{u}) + \mu\theta(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{0} + \mu \cdot \vec{0}$

- La aplicación identidad de $\mathbf{V}$ es una transformación lineal sobre $\mathbf{V}$: id_V: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $\vec{u} \rightsquigarrow \vec{u}$

- Las aplicaciones p_i: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow x_i \quad 1 \leq i \leq n$

  son obviamente lineales. p_i recibe el nombre de *i-ésima proyección de* $\mathbb{R}^n$.

- La aplicación s: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $\vec{u} \rightsquigarrow -\vec{u}$ que asocia a todo vector $\vec{u}$ su opuesto $-\vec{u}$ es una transformación lineal sobre $\mathbf{V}$.

  En efecto:
  $s(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = -(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = -(\lambda\vec{u}) - (\mu\vec{v}) = \lambda(-\vec{u}) + \mu(-\vec{v})) = \lambda s(\vec{u}) + \mu s(\vec{v})$,
  $\forall\lambda\mu \in \mathbb{R}$, $\forall\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$.

  La aplicación lineal s se denomina *simetría central de* $\mathbf{V}$.

  En el caso de $\mathbb{R}^3$, la simetría central es:

  s: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (-x, -y, -z)$

  En el caso de $\mathbb{R}^n$, la simetría central es:

  s: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

- Sea **V** un espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{R}$. La aplicación h_λ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una transformación lineal
$\vec{u} \rightsquigarrow \lambda\vec{u}$

sobre **V**.

En efecto:

a) Si $\lambda = 0$, h_λ es la aplicación θ, y por tanto lineal.

b) Si $\lambda \neq 0$, $h_\lambda(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u}) + \lambda(\beta\vec{v}) = (\lambda\alpha)\vec{u} + (\lambda\beta)\vec{v} = \alpha(\lambda\vec{u}) + \beta(\lambda\vec{v}) =$
$= \alpha h_\lambda(\vec{u}) + \beta h_\lambda(\vec{v}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$

La transformación lineal h_λ recibe el nombre de *homotecia vectorial* de razón λ. Por ejemplo, la homotecia de razón 4 en $\mathbb{R}^3$ es la transformación lineal h_4: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \rightsquigarrow (4x, 4y, 4z)$

- La aplicación f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \rightsquigarrow (2x, 3y)$ es una aplicación lineal.

En efecto:

$f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') =$
$= (2(\lambda x + \mu x'), 3(\lambda y + \mu y')) = (2\lambda x + 2\mu x', 3\lambda y + 3\mu y') =$
$= (2\lambda x, 3\lambda y) + (2\mu x', 3\mu y') = \lambda(2x, 3y) + \mu(2x', 3y') =$
$= \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z').$

Ejercicios:

1. Determinar si son lineales cada una de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$:

$f(x, y, z) = (x, y)$
$g(x, y, z) = (2x, 3z)$
$h(x, y, z) = (2, 3)$
$p(x, y, z) = (x, y) + (y, z)$
$q(x, y, z) = (x + 2, y - 3)$
$r(x, y, z) = (x - z, y - z)$

2. Determinar si son lineales cada una de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$:

$f(x, y, z) = (2x, 3y, z, 4)$
$g(x, y, z) = (2x, 3y, z, 0)$
$h(x, y z) = (x + y, y + z, z + x, z)$
$p(x, y, z) = (x, 0, y, 0)$

3. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ son transformaciones lineales.

$f(x, y, z) = (x, 1, x)$
$g(x, y, z) = (y, z, x)$
$h(x, y, z) = (2x, -2z, y)$
$p(x, y, z) = (x - z, y + z, z - x)$

5.4. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ dos espacios vectoriales y $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ una aplicación lineal. *El subconjunto de* $\mathbf{V}$ *formado por los vectores cuya imagen es el vector* $\vec{0}$ *se denomina núcleo de* f y se representa por ker$f$, es decir:

$$\ker f = \{\vec{u} \in \mathbf{V} | f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Se prueba fácilmente que ker$f$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$.

Ejemplos:

- Sea $p_3: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la tercera proyección de $\mathbb{R}^4$. Entonces:

  $\ker p_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid p_3(x, y, z, t) = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 0\} = \{(x, y, 0, t), x, y, t \in \mathbb{R}\}$

- Sea $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la homotecia de razón 3 en $\mathbb{R}^3$. Entonces,

  $\ker h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^5 \mid h(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (3x, 3y, 3z) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0, 0)\}$

5.5. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ de **5.4.**

El *conjunto imagen* de f, que se representa por $Im(f)$, *se define como el conjunto de los vectores de* $\mathbf{V}'$, *que son imágenes de los vectores de* $\mathbf{V}$, es decir: $Im(f) = \{f(\vec{v})/\vec{v} \in \mathbf{V}\}$. También es fácil probar (hágalo el lector) que $Im(f)$ es un subespacio de $\mathbf{V}'$.

A la dimensión del subespacio $Im(f)$ se la llama *rango* de la aplicación lineal f.

5.6. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ dos espacios vectoriales y $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ una aplicación lineal.

Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$, entonces $Im(f) = L\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$.

Es decir, el conjunto de las imágenes de los vectores de una base de $\mathbf{V}$ *es un sistema de generadores de* $Im(f)$.

En efecto. Sea $\vec{v} \in Im(f)$; existe entonces un vector $\vec{u} \in \mathbf{V}$ tal que $f(\vec{u}) = \vec{v}$.

Sea $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Se tiene:

$$\vec{v} = f(\vec{u}) = f[\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \lambda_2 f(\vec{u}_2) + \cdots + \lambda_n f(\vec{u}_n).$$

Luego todo vector $\vec{v} \in Im(f)$ se puede expresar como combinación lineal de

$$f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)$$

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x, x, z, 0)$.

  Entonces
  $$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$$
  $$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$
  $$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$$

  Por tanto, $Im(f) = L((1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)) = L((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$.

  Por ser $(1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 0)$ linealmente independientes, el rango de f es 2; $\text{rg}(f) = 2$.

- Consideremos la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x, 0, y)$. Las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$; $f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$; $f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, de donde

  $Im(f) = L((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)) = L((1, 0, 0), (0, 0, 1))$. En consecuencia, $\text{rg}(f) = 2$.

6 MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

6.1. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ dos espacios vectoriales de dimensión 2 y 3, respectivamente, y f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ una aplicación lineal. Supongamos también que $B_1 = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ son base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$, respectivamente.

Cada vector $\vec{x} \in \mathbf{V}$ es de la forma $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, y su imagen mediante la aplicación f es: $f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2)$. Como los vectores $f(\vec{e}_1)$ y $f(\vec{e}_2)$ pertenecen a $\mathbf{V}'$, se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base B_2.

$$f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3$$
$$f(\vec{e}_2) = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3$$

Así se obtiene: $f(\vec{x}) = x_1\,[a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3] + x_2\,[a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3] =$

$$= (x_1a_{11} + x_2a_{21})\,\vec{v}_1 + (x_1a_{12} + x_2a_{22})\,\vec{v}_2 + (x_1a_{13} + x_2a_{23})\,\vec{v}_3$$

lo que expresa que las coordenadas de $f(\vec{x})$ son los elementos y_1,y_2,y_3 dados por $y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{21}$; $y_2 = x_1a_{12} + x_2a_{22}$; $y_3 = x_1a_{13} + x_2a_{23}$.

Estas relaciones se pueden escribir en la forma matricial siguiente:

$$(y_1,y_2,y_3) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

relación que recibe el nombre de *expresión matricial de la aplicación lineal f*. La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ se llama matriz asociada a la aplicación lineal f con respecto a las bases B_1 y B_2 de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$, respectivamente. Cada fila de esta matriz está formada por las coordenadas respecto de la base B_2 de $\mathbf{V}'$ de los vectores imágenes de los que forma la base $B_1 = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. La matriz A depende, por tanto, de la aplicación lineal f y de las bases elegidas.

6.2. Supongamos ahora que $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ son dos espacios vectoriales de dimensiones m y n, respectivamente, y f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ una aplicación lineal de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}'$. Si $B_1 = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_m\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ son bases de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$, respectivamente, por un procedimiento totalmente análogo al anterior se puede obtener la expresión matricial de f.

Si $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m$,

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_m f(\vec{e}_m) \quad [1]$$

Como $f(\vec{e}_i) \in \mathbf{V}'$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{v}_n \\ f(\vec{e}_2) &= a_{21}\vec{v}_2 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{v}_n \\ &\vdots \\ f(\vec{e}_m) &= a_{m1}\vec{v}_1 + a_{m2}\vec{v}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{v}_n \end{aligned}$$

y sustituyendo estas expresiones en [1] se llega a la siguiente expresión matricial de la aplicación lineal f:

$$(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1,x_2,\ldots,x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como en el caso anterior, la matriz $A = (a_{ij})$ de la expresión anterior recibe el nombre de *matriz asociada a la aplicación lineal* respecto de las bases B_1 y B_2 de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$, respectivamente.

Se puede probar que, recíprocamente, fijada la matriz $A = (a_{ij})$ y las bases de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$, se le puede asociar una aplicación lineal de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}'$.

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = (3x_1, 2x_2, x_1 + x_2)$$

Según la definición de f se tiene:

$f(1, 0) = (3, 0, 1)$ y $f(0, 1) = (0, 2, 1)$. La matriz A asociada a f respecto de las bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. En consecuencia, la expresión matricial de f respecto de las bases canónicas es

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1, x_2)$. Entonces:

$f(1, 0) = (1, 3)$ y $f(0, 1) = (0, 1)$; por tanto, la matriz asociada a f es

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la expresión matricial de f es $(y_1, y_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio:

Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_2, x_1 + x_2)$$

a) Probar que f es una aplicación lineal.

b) Hallar $f(1, 0)$ y $f(0, 1)$.

c) Hallar la matriz A asociada a f respecto de las bases canónicas.

EJERCICIOS FINALES

1. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

   Determinar:

   a) $A \cdot B + 6C^t$ b) $A \cdot (B - AC)$ c) $(6A - T^t) \cdot C$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

   Determinar:

   a) $A^2 + B^2$ c) $A \cdot B$ e) $(A^t)^2 + (B^t)^2$ g) $(A^t \cdot B^t)^2$

   b) $A^3 + B^3$ d) $(A \cdot B)^2$ f) $A^t \cdot B^t$ h) $A^t \cdot B$

3. Determinar las potencias sucesivas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determinar las potencias sucesivas de la matriz $B = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$

5. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es inversa de sí misma.

6. Demostrar que las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes.

7. Siendo a y b distintos de cero, averiguar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ es inversible}$$

8. Sean A y B matrices de orden n. Demostrar que si A y B son inversibles, $A \cdot B$ también lo es y que se verifica $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

9. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, demostrar que si A es una matriz cuadrada inversible, su traspuesta también lo es.

10. Demostrar que las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ constituyen una base del espacio vectorial $\mathcal{M}_4$.

11. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Determinar el rango de A.

b) Comprobar que $A^2 - 2A + I = 0$.

13. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar que $(I_3 - A)^3 = 0$.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determinar la expresión analítica de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la matriz A respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

15. Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, -x_1 + x_4)$.

Se pide:

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

b) Determinar la matriz A asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

16. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$$

Se pide:

a) Determinar la matriz B asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Expresar matricialmente la aplicación f.

17. Determinar la matriz A asociada a la simetría central en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.

18. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determinar la imagen de los elementos $(-1, 2)$, $(4, 1)$ y $(0, -3)$ de $\mathbb{R}^2$.

b) Determinar la dimensión de $Im(f)$.

19. Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar la imagen de los elementos $(-1, 2, 3, 4)$, $(4, -5, 0, 6)$ y $(-3, -1, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ y calcular la dimensión de $Im(f)$.

20. Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal determinada por

$f(1, 0, 0, 0) = (-1, 2, 3)$; $f(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 1)$; $f(0, 0, 1, 0) = (4, 0, 2)$ y $f(0, 0, 0, 1) = (2, 5, -6)$

Expresar matricialmente f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ y determinar la dimensión de $Im(f)$.

TEMA 4 DETERMINANTES

El cálculo del rango de una matriz (tema 3), así como el estudio de los sistemas de ecuaciones (tema 1), se puede hacer sin ayuda de los determinantes. Sin embargo, tanto en las cuestiones mencionadas como en el cálculo de la matriz inversa los determinantes son una herramienta de gran utilidad. Aquí se da la definición clásica de determinante y para casi todas las propiedades se da una demostración para determinantes de orden n. Pero el profesor podrá optar, según su criterio, por comprobar estas propiedades con determinantes de tercer orden, evitando en este caso el estudio de todo lo relativo a las permutaciones.

1 PERMUTACIONES

1.1. Una permutación σ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ es una aplicación biyectiva de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo que representaremos por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n \\ j_1 & j_2 & j_3 \cdots j_n \end{pmatrix} \text{ o } \sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n, \text{ en donde } j_i = \sigma(i)$$

En la fila inferior están las imágenes de los elementos de la fila superior.

Ejemplo:

- En el conjunto $\{1, 2, 3\}$ las permutaciones posibles son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En la permutación σ_4 se tiene:

La imagen de 1 es 2, es decir, $\sigma_4(1) = 2$
La imagen de 2 es 3, es decir, $\sigma_4(2) = 3$
La imagen de 3 es 1, es decir, $\sigma_4(3) = 1$

Las permutaciones anteriores se escriben también prescindiendo de la primera fila así:

$\sigma_1 = 1\ \ 2\ \ 3$; $\sigma_2 = 1\ \ 3\ \ 2$; $\sigma_3 = 2\ \ 1\ \ 3$; $\sigma_4 = 2\ \ 3\ \ 1$; $\sigma_5 = 2\ \ 3\ \ 1$; $\sigma_6 = 3\ \ 2\ \ 1$

Cada una de las permutaciones anteriores es una ordenación de los elementos 1, 2, 3.

En general, una permutación de orden n se puede interpretar como una ordenación de los elementos $1, 2, 3 \ldots, n$. Se sabe que el número total de tales permutaciones es $n!$ Es decir, el cardinal del conjunto P_n de todas las permutaciones de n elementos es $n!$

1.2. Se llama *permutación principal* de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a la permutación en la que los elementos se encuentran en el orden natural, es decir, a la permutación $1\ 2\ 3 \ldots n$.

Dos elementos de una permutación, se dice que forman *permanencia* si están colocados en el mismo orden que en la permutación principal, y si están en orden contrario se dice que forman *inversión*.

Ejemplo:

- En $\{1, 2, 3, 4\}$ sea la permutación 3 2 4 1.

  Para saber el número total de inversiones, contamos la inversión que forma cada elemento de la permutación con todos los que le siguen:

	Núm. de inversiones
El 3 forma inversión con 2 y con 1 ⟶	2
El 2 forma inversión con el 1 ⟶	1
El 4 forma inversión con el 1 ⟶	1
El 1 no forma inversión con ningún elemento ⟶	0
	Total 4

1.3. Se dice que una inversión es *par* si tiene un número par de inversiones; en caso contrario se dice que es una permutación *impar*.

Ejemplo:

- La permutación 3 2 4 1 es par, ya que el número de inversiones es 4.

  La permutación 4 2 3 1 es impar, ya que el número de inversiones es 5.

Designemos por $i(\sigma)$ el número de inversiones de la permutación σ. El signo o la signatura de la permutación σ es $(-1)^{i(\sigma)}$ y la representaremos por $s(\sigma)$.

Entonces $s(\sigma) = 1$ si σ es par. $\quad s(\sigma) = -1$ si σ es impar.

Si en una permutación se intercambian entre sí dos elementos, diremos que se ha realizado una trasposición en dicha permutación. Así de la permutación 3 2 1 4 se pasa a la permutación 2 3 1 4 por la trasposición del 2 y el 3.

1.4. *Teorema. Si en una permutación, se cambian entre sí dos elementos, es decir, se realiza una trasposición, la permutación que resulta es de distinta clase que la dada.*

Para demostrarlo distinguiremos dos casos:

a) *La trasposición se realiza entre dos elementos consecutivos.*

Sea la permutación $\sigma = r_1\, r_2 \cdots r_h\, r_{h+1} \cdots r_n$.

Al cambiar entre sí los elementos r_h y r_{h+1} resulta la permutación

$$\sigma' = r_1\, r_2 \cdots r_{h+1}\, r_h \cdots r_n$$

Ahora bien, todos los elementos guardan entre sí, en ambas permutaciones, la misma posición relativa, salvo r_h y r_{h+1}, que si en σ forman permanencia, en σ' forman inversión, y recíprocamente. Entonces si en σ' hay una inversión menos, o una más que en σ, resulta que son de distinta clase.

b) *La trasposición se realiza entre dos elementos cualesquiera.*

Supongamos que los elementos que se cambian son r_p y r_q y que hay h elementos entre ellos.

$$\sigma = r_1\, r_2 \cdots r_p \cdots r_q \cdots r_n$$
$$\sigma' = r_1\, r_2 \cdots r_q \cdots r_p \cdots r_n$$

Partiendo de σ podemos llegar a $\sigma'' = r_1\, r_2 \cdots r_q\, r_p \cdots r_n$ permutando r_p con todos los que le siguen, hasta r_q incluido, con lo cual se habrán producido $h + 1$ cambios de clase. Si partimos ahora de σ'' y hacemos retroceder r_q permutando con los h elementos que le preceden se llega a la permutación σ'. En este segundo paso se han producido h cambios de clase. En total, para pasar de σ a σ' se han producido $2h + 1$ cambios de clase, y como $2h + 1$ es un número impar, σ' es de distinta clase que σ.

Ejemplo:

- La permutación 3 2 1 4 es de clase impar porque tiene tres inversiones.

  Intercambiando el 2 y el 4 resulta la permutación 3 4 1 2, que es de clase par, ya que tiene cuatro inversiones.

Corolario. De las n! permutaciones de n elementos, la mitad son de clase par y la otra mitad de clase impar.

En efecto si I es el número de permutaciones impares y P el de permutaciones pares, se tiene $I + P = n!$

Ahora bien, si en cada una de las permutaciones se hace la trasposición de dos elementos, por ejemplo, r_1 y r_2, todas cambiarán de clase según el teorema anterior, pasando las de clase par a impar y viceversa. Por tanto, hay I permutaciones de clase par y P de clase impar; es decir, $I = P$, y por tanto, habrá $\frac{n!}{2}$ permutaciones de clase par y $\frac{n!}{2}$ permutaciones de clase impar.

Ejemplo:

- En las seis permutaciones de 1, 2, 3:

  1 2 3, 2 3 1, 3 1 2 son de clase par.

  2 1 3, 1 3 2, 3 2 1 son de clase impar.

1.5. Dada una permutación, por ejemplo, 5 4 2 1 6 3, ya vimos en **1.2** y **1.3** que para averiguar si es de clase par o impar basta contar el número total de inversiones que forma cada elemento con todos los que le siguen.

El 5 forma cuatro inversiones,

el 4 forma cinco inversiones,

el 2 forma una inversión,

el 6 forma una inversión,

En total hay nueve inversiones, luego la permutación 5 4 2 1 6 3 es de clase impar.

Se puede averiguar también la paridad de la permutación dada contando el número de trasposiciones que hay que realizar en ella para llegar a la permutación principal.

Así: Primera trasposición 1 y 5:

$$\overbrace{5\,4\,2\,1}\,6\,3 \quad \rightarrow \quad 1\,4\,2\,5\,6\,3$$

Segunda trasposición 2 y 4:

$$1\,\overset{\curvearrowleft}{4}\,2\,\overset{\curvearrowright}{5}\,6\,3 \quad \rightarrow \quad 1\,2\,4\,5\,6\,3$$

Tercera trasposición 4 y 3:

$$1\,2\,\overbrace{4\,5\,6\,3} \quad \rightarrow \quad 1\,2\,3\,5\,6\,4$$

Cuarta trasposición 5 y 4:

$$1\,2\,3\,\overbrace{5\,6\,4} \quad \rightarrow \quad 1\,2\,3\,4\,6\,5$$

Quinta trasposición 6 y 5:

$$1\,2\,3\,4\,\overset{\curvearrowleft}{6}\,\overset{\curvearrowright}{5} \quad \rightarrow \quad 1\,2\,3\,4\,5\,6$$

permutación principal

Como el número total de trasposiciones que se han realizado para llegar a la permutación principal es 5 (impar), la permutación dada 5 4 2 1 6 3 es de clase impar.

1.6. Consideremos de nuevo la permutación anterior 5 4 2 1 6 3.

Situemos la permutación principal encima de la dada: 1 2 3 4 5 6
5 4 2 1 6 3

Si sometemos la permutación dada a las trasposiciones realizadas en **1.5** y paralelamente hacemos la correspondiente trasposición en la permutación principal (con los elementos que ocupan la misma posición) resulta:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1\,2\,3\,4\,5\,6 & & 4\,2\,3\,1\,5\,6 & & 4\,3\,2\,1\,5\,6 & & 4\,3\,6\,1\,5\,2 & & 4\,3\,6\,2\,5\,1 & & 4\,3\,6\,2\,1\,5 \\
 & \overset{1.ª}{\rightarrow} & & \overset{2.ª}{\rightarrow} & & \overset{3.ª}{\rightarrow} & & \overset{4.ª}{\rightarrow} & & \overset{5.ª}{\rightarrow} & \\
5\,4\,2\,1\,6\,3 & & 1\,4\,2\,5\,6\,3 & & 1\,2\,4\,5\,6\,3 & & 1\,2\,3\,5\,6\,4 & & 1\,2\,3\,4\,6\,5 & & 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\
\uparrow\!__\!\uparrow & & \uparrow\!\uparrow & & \uparrow\!___\!\uparrow & & \uparrow\!__\!\uparrow & & __\uparrow\!\uparrow & &
\end{array}$$

De la permutación 5 4 2 1 6 3 hemos pasado a la permutación principal mediante cinco transformaciones; por consiguiente, esta permutación es de clase impar.

Por otra parte, de la permutación principal (ver línea superior del esquema anterior) hemos pasado a la 4 3 6 2 1 5 mediante cinco trasposiciones, por lo que esta última permutación es también de clase impar. Así las permutaciones 5 4 2 1 6 3 y 4 3 6 2 1 5 son de la misma clase.

Esta propiedad de las permutaciones que acabamos de ver en un ejemplo se puede formular en forma general del modo siguiente:

Si se tienen las permutaciones

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ \ldots\ n \\ r_1\ r_2\ r_3\ \ldots\ r_n \end{array}$$

y se realizan las trasposiciones necesarias (como se ha hecho en el ejemplo) hasta conseguir que la segunda permutación sea la principal, la primera se convierte en otra permutación $i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$, y las dos permutaciones $\sigma = r_1\ r_2\ r_3\ \ldots\ r_n$ y $\sigma' = i_1\ i_2\ i_3\ \ldots\ i_n$ son de la misma clase.

2 DEFINICIÓN DE DETERMINANTE

2.1. A continuación se va a asociar a cada matriz cuadrada A de orden n un número real llamado determinante de A. Este lo representaremos por $|A|$ o $\det(A)$ indistintamente.

Definición

Dada una matriz cuadrada A de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama determinante de A al número definido por

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} s(\sigma)\, a_{1r_1}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n}$$

Sobre esta definición conviene aclarar:

a) Por cada permutación $\sigma = r_1\, r_2 \ldots r_n$ de dos números 1 2 3 . . . n hay un sumando o término; por consiguiente, el determinante de una matriz cuadrada de orden n consta de $n!$ sumandos.

b) Cada sumando o término del determinante es un producto de n elementos de la matriz, de tal manera que de cada fila y de cada columna hay un y sólo un elemento.

c) El signo de cada sumando será + o − según sea el signo de la permutación σ, es decir, $s(\sigma)$.

Apliquemos la definición a los determinantes de segundo y tercer orden.

2.2. *Determinantes de segundo orden.*

La matriz cuadrada A es en este caso de segundo orden: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Las permutaciones de $\{1, 2\}$ son $\sigma_1 = 12$, $\sigma_2 = 21$, luego $P_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_2} s(\sigma)\, a_{1r_1}\, a_{2r_2}$$

Como hay dos permutaciones, el determinante tendrá dos sumandos:

$$\det(A) = s(\sigma_1)\, a_{11}\, a_{22} + s(\sigma_2)\, a_{12}\, a_{21} \quad [1]$$

Como σ_1 es par, $s(\sigma_1)$ es positivo $\Rightarrow s(12) = +1$.

Como σ_2 es impar (tiene una inversión), $s(\sigma_2)$ es negativo $\Rightarrow s(21) = -1$.

Por consiguiente: $\det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$.

También se escribe:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Positivos

Negativos

Ejemplos:

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5;$
- $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 15$
- $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-2) \cdot 6 = 24;$
- $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot 2 = 0$

2.3. *Determinantes de tercer orden. Regla de Sarrus*

Ahora se trata de una matriz de grado $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ son seis, de las cuales tres son pares y tres impares:

$$\text{Permutaciones pares} \begin{cases} \sigma_1 = 1\ 2\ 3 \longrightarrow s(1\ 2\ 3) = +1 \\ \sigma_2 = 2\ 3\ 1 \longrightarrow s(2\ 3\ 1) = +1 \\ \sigma_3 = 3\ 1\ 2 \longrightarrow s(3\ 1\ 2) = +1 \end{cases}$$

$$\text{Permutaciones impares} \begin{cases} \sigma_4 = 2\ 1\ 3 \longrightarrow s(2\ 1\ 3) = -1 \\ \sigma_5 = 3\ 2\ 1 \longrightarrow s(3\ 2\ 1) = -1 \\ \sigma_6 = 1\ 3\ 2 \longrightarrow s(1\ 3\ 2) = -1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in P_3} s(\sigma)\, a_{1r_1} a_{2r_2} a_{3r_3} = \\ &= s(\sigma_1)\, a_{11}a_{22}a_{33} + s(\sigma_2)\, a_{12}a_{23}a_{31} + s(\sigma_3)\, a_{13}a_{21}a_{32} + s(\sigma_4)\, a_{12}a_{21}a_{33} + \\ &+ s(\sigma_5)\, a_{13}a_{22}a_{31} + s(\sigma_6)\, a_{11}a_{23}a_{32} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

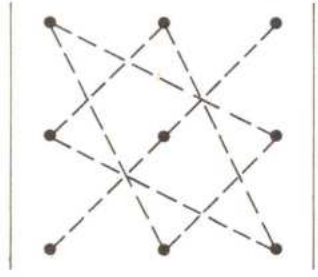
Por lo tanto:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con ayuda del siguiente esquema, conocido por *la regla de Sarrus*:

\+

Términos con signo +



\−

Términos con signo −

Ejemplos:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 2 + 2\cdot 6\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 6\cdot 1 =$
$= 10 + 36 + 12 - 16 - 45 - 6 = -9$

- $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 4\cdot 3 - 5\cdot 2\cdot 6 = 0$

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 40 + 4 - 0 - 48 = 0$

2.4. La definición de determinante para una matriz cuadrada de orden 4 será:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in P_4} s(\sigma)\, a_{1r_1}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3}\, a_{4r_4}$$

Como con los números $\{1, 2, 3, 4\}$ se pueden formar $P_4 = 4! = 24$ permutaciones, $\det(A)$ tiene 24 términos; por esta razón, los determinantes de orden igual o superior a 4 no se calculan partiendo de la definición. Las propiedades de los determinantes nos proporcionarán otro método más sencillo para calcular los determinantes mencionados.

2.5. En la definición de determinantes de una matriz cuadrada de orden n

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in P_n} s(\sigma)\, a_{1r_1}\, a_{2r_2} \ldots a_{nr_n}$$

los índices de fila en cada término del determinante es la permutación principal 1 2 3 . . . n.

Si en el término $s(\sigma) = a_{1r_1}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \cdots a_{nr_n}$ ordenamos los factores de modo que la permutación de los índices columnas sea la principal, resulta

$$s(\sigma') = a_{i_1 1}\, a_{i_2 2}\, a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$$

Este producto es en valor absoluto igual al anterior por tener los mismos factores, y por lo dicho en **1.6** las permutaciones $\sigma = r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_n$ y $\sigma' = i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_n$ son de la misma clase.

Luego, $s(\sigma') = s(\sigma)$, con lo que $s(\sigma) = a_{1r_1}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n} = s(\sigma')\, a_{i_1 1}\, a_{i_2 2}\, a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$.

Como esto ocurriría con cada uno de los términos, resulta que el determinante de A se puede definir como

$$\det(A) = \sum_{\sigma'\in P_n} s(\sigma')\, a_{i_1 1}\, a_{i_2 2}\, a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$$

De aquí se deduce la siguiente propiedad fundamental de los determinantes:

El determinante de una matriz cuadrada A es igual al determinante de su traspuesta $|A^t| = |A|$. Esta propiedad reduce todo teorema relativo a filas a otro relativo a columnas, y recíprocamente.

Nota. Llamando, como en el tema 3, $A^1, A^2, \ldots, A^n$ a los vectores columna de A y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a los vectores fila, se puede utilizar la siguiente notación para el determinante de A:

$$\det(A) = |A| = \det(A^1, A^2, \ldots, A^n) = \det(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

Ejercicios:

1. Determinar el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & a \end{vmatrix}$

2. Determinar el valor o valores de a en cada uno de los siguientes casos:

a) $\begin{vmatrix} a & -7 & 4 \\ -1 & a & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a+1 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & a-2 \end{vmatrix} = 6$ c) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & a+3 & 1 \\ -1 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = 30$

3 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades de los determinantes, que probaremos para las filas o para las columnas, son válidas en cualquier caso, para filas y para columnas.

3.1.

$$\det(A^1, A^2, ..., \alpha A^i + \beta B^i, ..., A^n) = \alpha \det(A^1, A^2, ..., A^i, ..., A^n) + \beta \det(A^1, A^2, ..., B^i, ..., A^n)$$

Hagamos la demostración. Para simplificar, en el caso de que sea la primera columna la que se desdoble en suma, $\alpha A^1 + \beta B^1$. Es decir, vamos a probar que $\det(\alpha A^1 + \beta B^1, A^2, ..., A^n) = \alpha \det(A^1, A^2, ..., A^n) + \beta \det(B^1, A^2, ..., A^n)$.

En efecto:

$$\det[\alpha A^1 + \beta B^1, A^2, ..., A^n] = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum s(\sigma)\, (\alpha a_{1r_1} + \beta b_{1r_1})\, a_{2r_2} \ldots a_{nr_n} =$$

$$= \alpha \sum s(\sigma)\, a_{1r_1}\, a_{2r_2} \ldots a_{nr_n} + \beta \sum s(\sigma)\, b_{1r_1}\, a_{2r_2} \ldots a_{nr_n} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Luego $\det(\alpha A^1 + \beta B^1, A^2, ..., A^n) = \alpha \det(A^1, A^2, ..., A^n) + \beta \det(B^1, A^2, ..., A^n)$.

Consecuencia de esta propiedad son las dos siguientes:

a) Si $\alpha = \beta = 1$ resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

es decir

$$\det(A^1+B^1, A^2 \ldots A^n) = \det(A^1, A^2 \ldots A^n) + \det(B^1, A^2 \ldots A^n)$$

Esta propiedad se puede enunciar del modo siguiente:

Si cada elemento de una determinada columna (fila) es igual a la suma de varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que se van formando al sustituir dicha columna (o fila) por los primeros, segundos ... sumandos.

b) Si $\beta = 0$ se tiene:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \alpha a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

es decir

$$\det(\alpha A^1, A^2, \ldots, A^n) = \alpha \det(A^1, A^2, \ldots, A^n)$$

Si se multiplican (o dividen) por $\alpha \neq 0$ todos los elementos de una linea (columna o fila), el determinante queda multiplicado (o dividido) por α.

Ejemplos:

- $$\begin{vmatrix} 5\cdot 2 & 1 & 0 \\ 5\cdot 3 & 2 & 1 \\ 5\cdot 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3.2. Si se permutan *entre sí dos líneas (columnas o filas) de un determinante, éste cambia de signo.*

Demostremos la propiedad para el caso de que sean la primera y segunda filas las que se permuten.

$$\det(A_2, A_1, \ldots, A_n) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma' \in P_n} s(\sigma')\, a_{2r_2}\, a_{1r_1} \ldots a_{nr_n} \quad [1]$$

$$\det(A_1, A_2, ..., A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} s(\sigma)\, a_{1r_1}\, a_{2r_2} \ldots a_{nr_n} \quad [2]$$

Los $n!$ términos que se obtienen en [1] cuando σ' recorre todas las permutaciones P_n son los mismos que los $n!$ términos de [2]. Ahora bien, la permutación $\sigma = r_2\, r_1 \ldots r_n$ se obtiene de $\sigma = r_1\, r_2 \ldots r_n$ mediante la trasposición de r_1 y r_2, por lo que ambas permutaciones son de distinta clase y $s(\sigma') = -s(\sigma)$, por lo que

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De forma análoga se prueba que el signo varía si se intercambian las filas i y j.

3.3. *Si un determinante tiene dos filas (o dos columnas) iguales, entonces el determinante es igual a cero.*

En efecto, sea el determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

que tiene iguales las filas i y j. Si se intercambian las filas i y j resulta el mismo determinante, y por la propiedad **3.2** $|A| = -|A|$, es decir, $2|A| = 0$ y $|A| = 0$.

3.4. *Si un determinante tiene dos columnas (o filas) proporcionales, su valor es cero.*

En efecto, si suponemos proporcionales la primera y segunda filas y tenemos en cuenta las propiedades **3.2** y **3.3,** resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

3.5. *Si todos los elementos de una fila (o columna) son ceros, el determinante vale cero.* En efecto, cada uno de los $n!$ términos del determinante posee un y sólo un elemento de cada fila y columna y, por tanto, en cada uno de ellos aparecerá un factor igual a cero, y por consiguiente $|A| = 0$.

3.6. *El valor de un determinante no varía si a los elementos de una columna (o fila) se les suma los correspondientes de otra paralela multiplicados por un mismo número real* λ.

En efecto, sumemos a la columna j la columna k multiplicada por λ.

$$\det(A^1, A^2, \ldots, A^j + \lambda A^k, \ldots, A^k, \ldots, A^n) =$$
$$= \det(A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^k, \ldots, A^n) + \det(A^1; A^2, \ldots, \lambda A^k, \ldots, A^k, \ldots, A^n) =$$
$$= \det(A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^k, \ldots, A^n)$$

ya que el segundo sumando es un determinante nulo por tener dos columnas proporcionales.

En general, si a una columna (o fila) se le suma una combinación lineal de las restantes columnas (o filas), el determinante no varía.

Nota. Esta propiedad la usaremos en el apartado 5 para calcular determinantes.

3.7. *Si una columna (o fila) de un determinante es combinación lineal de las restantes columnas (o filas), entonces el valor del determinante es cero.*

En efecto, supongamos que la segunda columna A^2 sea combinación lineal de $A^1, A^3, \ldots, A^n$; $A^2 = \lambda A^1 + \mu A^3 + \cdots + \gamma A^n$.

Entonces, aplicando la propiedad **3.1,** se tiene:

$$\det(A^1, A^2, A^3, A^n) = \det(A^1, \lambda A^1 + \mu A^3 + \cdots + \gamma A^n, A^3, \ldots, A^n) =$$
$$= \det(A^1, \lambda A^1, A^3, \ldots, A^n) + \det(A^1, \mu A^3, A^3, \ldots, A^n) + \cdots + \det(A^1, \gamma A^n, A^3, \ldots, A^n) =$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

ya que en cada uno de los determinantes anteriores aparecen dos columnas proporcionales.

3.8. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, entonces

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Comprobemos esta propiedad con un

Ejemplo:

- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) \cdot \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) = -10$$

$$\det(A \cdot B) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

4 MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

4.1. Sea A una matriz cuadrada de orden n y a_{ij} uno de sus elementos. Si en A se suprime la fila i y la columna j se obtiene una submatriz cuadrada de orden $n - 1$ que recibe el nombre de submatriz complementaria del elemento a_{ij}. El determinante de esta submatriz se llama *menor complementario* del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}. Por otra parte, se llama *adjunto* del elemento a_{ij}, y se representa por A_{ij}, el menor complementario de a_{ij} precedido del signo + o − según que $i+j$ sea par o impar. Es decir, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.

Ejemplos:

- En el determinante de cuarto orden $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

el menor complementario de a_{21} es $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12$

y el menor complementario de a_{22} es $\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -18$

El adjunto de a_{21} es $A_{21} = (-1)^{2+1}\alpha_{21} = (-1) : (-12) = 12$

El adjunto de a_{22} es $A_{22} = (-1)^{2+2}\alpha_{22} = \alpha_{22} = -18$

- En la matriz $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ el menor complementario del elemento a_{32} es $\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

y el adjunto $A_{32} = (-1)^{3+2}\alpha_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

4.2. *El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos.*

Es decir, tomando la fila i se tiene:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Demostración

Basta con probar que en el desarrollo de A el coeficiente de a_{ij} es A_{ij}.

a) *Lo probaremos en primer lugar para el elemento* a_{11}.

Los sumandos o términos en los que figura a_{11} son de la forma

$$s(\sigma)\, a_{11}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n}$$

es decir, son los términos correspondientes a las permutaciones

$$\sigma = 1 r_2\, r_3 \ldots r_n \text{ o bien } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \end{pmatrix} \text{ en las que } \sigma(1) = 1$$

La suma de todos los términos de esa forma es

$$\sum s(\sigma)\, a_{11}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n}$$

en donde el sumatorio se extiende a todas las permutaciones $r_2\, r_3 \ldots r_n$ de $\{2, 3, \ldots, n\}$.

Ahora bien, como las permutaciones $(1\ r_1\ r_2\ r_3 \ldots r_n)$ y $(r_2\ r_3 \ldots r_n)$ tienen el mismo signo, ya que tienen igual número de inversiones, la expresión anterior se puede escribir sacando factor común a_{11}:

$$a_{11} \sum s(\sigma)\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n}$$

y este último sumatorio coincide, por definición de determinante, con

$$\alpha_{11} = A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por tanto, la suma de todos los términos en que aparece a_{11} es

$$\sum s(\sigma)\, a_{11}\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n} = a_{11} \sum s(\sigma)\, a_{2r_2}\, a_{3r_3} \ldots a_{nr_n} = a_{11} A_{11}$$

b) *Veamos ahora para un elemento cualquiera* a_{ij}.

Si en la matriz A se lleva la fila i al lugar de la primera fila mediante $i-1$ cambios de filas y después la columna j al lugar de la primera columna mediante $j-1$ cambios de columna, se obtiene otra matriz B, lo que conlleva $(i-1)+(j-1) = i+j-2$ cambios de signo en el determinante, es decir,

$$\det(A) = (-1)^{i+j} \det B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1j} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{ij-1} & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1j} & \cdots & a_{i-1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij-1} & \cdots & a_{in} \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij-1} & \cdots & a_{in} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-i\,j-1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se observa, además, que el menor complementario de a_{ij} en A es el mismo que el menor complementario del elemento b_{11} de B; por consiguiente, el coeficiente de a_{ij} sería α_{ij} afectado de $(-1)^{i+j}$, es decir, que en el desarrollo de A el coeficiente de a_{ij} es A_{ij}. Por tanto,

$$\det(A) = (-1)^{i+j} \det B = (-1)^{i+j} (a_{ij}\alpha_{ij} + \cdots) = a_{ij}(-1)^{i+j}\alpha_{ij} + \cdots = a_{ij}A_{ij} + \cdots$$

Finalmente, como en cada sumando de $\det A$ hay un factor y sólo uno de la fila i, podemos agrupar los sumandos en que está a_{i1}, después los sumandos en que está a_{i2}, etc., y resulta:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

4.3. *En una matriz cuadrada, el producto de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna) distinta es cero.*

Es decir, si tomamos los elementos de la fila i y los adjuntos de la fila j, la propiedad puede expresarse así:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0;\ i \neq j$$

En efecto, el siguiente determinante que tiene iguales las filas i y j vale cero por tener dos filas iguales.

$$\text{fila } i \searrow \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{fila } j \rightarrow$$

Desarrollando el determinante por la fila j y teniendo en cuenta la propiedad anterior:

$$|A| = a_{i1}A_{ji} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

y como $|A| = 0$, resulta $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$.

5 CÁLCULO DE DETERMINANTES

Se ha visto en **4.2** que un determinante se puede desarrollar multiplicando los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos respectivos.

Ejemplos:

- El determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ lo podemos calcular por los adjuntos de la primera fila:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Entonces $\quad |A| = aA_{11} + 0A_{12} + 3A_{13} = -1 + 0 - 3 = -4$

El mismo resultado se obtiene desarrollando A por la regla de Sarrus.

- Sea el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Los menores complementos de los distintos elementos tienen los siguientes signos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila se tiene:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-10) + 0 + 1\cdot 5 - 2\cdot(-12) = -10 + 5 + 24 = +19$$

El mismo resultado se puede obtener haciendo ceros en la primera fila aplicando la propiedad **3.6**.

En efecto, sumando a la tercera columna la opuesta de la primera y a la cuarta la primera multiplicada por -2 resulta:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la primera fila se tiene:

$$A = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = +19$$

- Sea $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Sumando a los elementos de la segunda fila los correspondientes de la primera fila se tiene:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sumando a continuación a los elementos de la tercera fila los de la primera multiplicados por (-2) y a los de la cuarta los de la primera multiplicados por -3, resulta:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -15$$

- Sea $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Por ser los números 125, 175 y 225 múltiplos de 25, D es múltiplo de 25. En efecto:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\cdot 100 + 2\cdot 10 + 5 \\ 1 & 7 & 1\cdot 100 + 7\cdot 10 + 5 \\ 2 & 2 & 2\cdot 100 + 2\cdot 10 + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 125 \\ 1 & 7 & 175 \\ 2 & 2 & 225 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

- Sea $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Restemos a la última fila la penúltima multiplicada por a:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$$

Repitiendo el proceso:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\ (c-a)\ (d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\ (c-a)\ (d-a)\ (c-b)\ (d-b)\ (d-c)$$

Los determinantes similares al anterior reciben el nombre de *determinantes de Vandermonde.*

- Consideremos la matriz triangular A (ver tema 3).

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 \ \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calculando un determinante por los elementos de la primera columna y repitiendo el proceso en los determinantes que se van obteniendo se tiene:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 \ \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ 0 & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ \ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} \ldots a_{3n} \\ 0 \ \ldots a_{4n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \ \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$$

Es decir, el *determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.*

- Lo mismo ocurre con el determinante de una matriz diagonal (ver **1.5** del tema 3).

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32}a_{33}a_{44}$$

Ejercicios:

1. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Desarrollar los siguientes determinantes de Vandermonde:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \\ 49 & 64 & 81 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$

3. Sea $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Demostrar que Δ es un múltiplo de 13 sin utilizar su desarrollo.

4. Determinar el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $|A|; |B|; |C|$
b) $|A + B|$
c) $|3A + 2B|$
d) $|A| \cdot |B|$
e) $|A \cdot B|$
f) Comprobar que $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$

6. Expresar en forma de producto los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$

6 DETERMINANTES Y DEPENDENCIA LINEAL

6.1. Sean $A^1, A^2, \ldots, A^n$ n vectores de $\mathbb{R}^n$. Y sea $B = \lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Entonces se verifica que

$$\det(A^1, A^2, \ldots, \overset{i}{\widehat{B}}, \ldots, A^n) = \lambda_i \det(A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^n)$$

En efecto:

$$\det(A^1, A^2, \ldots, \overset{i}{\widehat{B}}, \ldots, A^n) = \det(A^1, A^2, \ldots, \overset{i}{\widehat{\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n}}, \ldots, A^n) =$$

$$= \det(A^1, A^2, \ldots, \overset{i}{\widehat{\lambda_1 A^1}}, \ldots, A^n) + \det(A^1, A^2, \ldots, \overset{i}{\widehat{\lambda_2 A^2}}, \ldots, A^n) + \cdots +$$

$$+ \det(A^1, A^2, \ldots, \lambda_i A^i, \ldots, A^n) + \cdots + \det(A^1, A^2, \ldots, \overset{i}{\widehat{\lambda_n A^n}}, \ldots, A^n) =$$

$$= \lambda_i \det(A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^n)$$

sin más que tener en cuenta las propiedades de los determinantes.

Ejemplo:

- Sea $A^1 = (1, -1, -2, 0)$, $A^2 = (-4, 0, 2, -3)$, $A_3 = (0, -1, 3, 2)$ y $A^4 = (-3, 6, 2, 1)$.

  Sea $B = 3A^1 + 4A^2 + 3A^3 - 5A^4$.

  En primer lugar:

$$\det(A^1, A^2, A^3, A^4) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -6 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -71$$

  Por tanto, $\det(B, A^2, A^3, A^4) = 3 \cdot (-71) = -213$

  $\det(A^1, B, A^3, A^4) = 4 \cdot (-71) = -284$

  $\det(A^1, A^2, B, A^4) = 3 \cdot (-71) = -213$

  $\det(A^1, A^2, A^3, B) = (-5)(-71) = 355$

6.2. Sean $A^1, A^2, \ldots, A^n$ n vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces $A^1, A^2, \ldots, A^n$ son linealmente independientes si y sólo si $\det(A^1, A^2, \ldots, A^n) \neq 0$.

Demostración

«$\Leftarrow$». Supongamos que los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$ son linealmente dependientes; entonces uno de ellos es combinación lineal de los demás; por tanto, teniendo en cuenta la propiedad **3.7** de los determinantes, $\det(A^1, A^2, \ldots, A^n) = 0$. Este razonamiento prueba que si $\det(A^1, A^2, \ldots, A^n) \neq 0$, los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$ son linealmente independientes.

«$\Rightarrow$». Demostremos ahora que si los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$ de $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, entonces su determinante correspondiente es distinto de cero. Consideremos el caso de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes.

Si A^1, A^2 y A^3 son linealmente independientes, $\{A^1, A^2, A^3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Si $\{E^1, E^2, E^3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$E^i = \lambda_{1i}A^1 + \lambda_{2i}A^2 + \lambda_{3i}A^3, \quad 1 \leq i \leq 3$$

Como $\det(E^1, E^2, E^3) = 1$, expresando E^1, E^2 y E^3 como combinación lineal de A^1, A^2, A^3, se tiene:

$$\begin{aligned}1 &= \det(\lambda_{11}A^1 + \lambda_{21}A^2 + \lambda_{31}A^3, \lambda_{12}A^1 + \lambda_{22}A^2 + \lambda_{32}A^3, \lambda_{13}A^1 + \lambda_{23}A^2 + \lambda_{33}A^3) = \\ &= \det(\lambda_{11}A^1, \lambda_{12}A^1 + \lambda_{22}A^2 + \lambda_{32}A^3, \lambda_{13}A^1 + \lambda_{23}A^2 + \lambda_{33}A^3) + \\ &+ \det(\lambda_{21}A^2, \lambda_{12}A^1 + \lambda_{22}A^2 + \lambda_{32}A^3, \lambda_{13}A^1 + \lambda_{23}A^2 + \lambda_{33}A^3) + \\ &+ \det(\lambda_{31}A^3, \lambda_{12}A^1 + \lambda_{22}A^2 + \lambda_{32}A^3, \lambda_{13}A^1 + \lambda_{23}A^2 + \lambda_{33}A^3).\end{aligned}$$

De la misma forma que en el paso anterior, se ha descompuesto el determinante en una suma de determinantes. Atendiendo a la suma de vectores que aparecen en su primera columna, se descomponen a su vez cada uno de los determinantes resultantes respecto de las sumas de vectores que aparecen en sus segundas y terceras columnas, respectivamente. De esta forma, y teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, resulta:

$$\begin{aligned}1 &= \lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}\det(A^1, A^2, A^3) + \lambda_{11}\lambda_{32}\lambda_{23}\det(A^1, A^3, A^2) + \\ &+ \lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{33}\det(A^2, A^1, A^3) + \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13}\det(A^2, A^3, A^1) + \\ &+ \lambda_{31}\lambda_{12}\lambda_{23}\det(A^3, A^1, A^2) + \lambda_{31}\lambda_{22}\lambda_{13}\det(A^3, A^2, A^1)\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}1 = \det(A^1, A^2, A^3)\,[&\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{11}\lambda_{32}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{33} + \\ &+ \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13} + \lambda_{31}\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{31}\lambda_{22}\lambda_{13}]\end{aligned}$$

En consecuencia, $\det(A^1, A^2, A^3) \neq 0$, ya que el producto del segundo miembro de la anterior igualdad está igualado a 1.

Ejemplos:

- Sean los vectores $\vec{u} = (3, -1, 7), \vec{v} = (4, 0, -1)$ y $\vec{w} = (1, 0, -2)$.

  Por ser $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

  los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y de aquí que formen una base de $\mathbb{R}^3$.

- Sean los vectores $\vec{u} = (0, 0, 1, 6)$, $\vec{v} = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{w} = (1, -2, 0, 1)$ y $\vec{t} = (-1, 1, 2, 0)$.

  Por ser

  $$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

  $$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$ los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ constituyen una base de $\mathbb{R}^4$.

- Sean los vectores $\vec{u} = (6, 3, 2)$, $\vec{v} = (7, 3, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 0, -2)$

  Por ser $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

  los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

Ejercicios:

1. Sea $A^1 = (-1, 2, 0)$, $A^2 = (2, 1, 8)$, $A^3 = (-1, 3, 2)$ y $B = 3A^1 - 4A^2 + 5A^3$.

   Determinar:

   $\det(A^1, A^2, A^3)$; $\det(B, A^2, A^3)$; $\det(A^1 + B, A^2, A^3)$; $\det(A^1, B, A^3)$;

   $\det(A^1, B + A^2, A^3)$; $\det(A^1, A^2, B)$; $\det(A^1, A^2, A^3 + B)$.

2. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base de $\mathbb{R}^4$.

   $B_1 = \{(-1, 2, 3, 0), (4, 1, 2, 0), (-3, 1, 0, -7), (4, 1, 2, 3)\}$

   $B_2 = \{(1, -1, 2, 3), (-4, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 6), (1, 0, 3, 1)\}$

   $B_3 = \{(4, 1, 5, 6), (-1, 2, 5, 2), (-4, 1, 5, 3), (1, -4, -15, -7)\}$

   $B_4 = \{(1, 0, 1, 0), (2, -1, 3, 0), (0, 1, 0, 7), (4, -4, 1, 0)\}$

7 LOS DETERMINANTES Y EL RANGO DE UNA MATRIZ

7.1. Sea B una matriz arbitraria de orden $m \times n$. Los elementos pertenecientes a la intersección de r filas y r columnas, siendo $1 \leq r \leq \text{mín}(m, n)$, forman una submatriz cuadrada de orden r cuyo determinante recibe el nombre de menor de la matriz B.

Ejemplo:

- Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

  Los menores de orden 3 de la matriz B son:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 12; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -32; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -16; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -28$$

  Entre los menores de orden 2 de la matriz B figuran:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

  Obviamente los menores de orden 1 son todos y cada uno de los elementos de B.

7.2. Una matriz cuadrada de orden n posee rango n si y sólo si su determinante es distinto de cero. La demostración de esta propiedad es consecuencia inmediata de **6.2.**

Ejemplos:

- Sea $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$ Por tanto, rango de $B = 4$.

- Sea $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a & a-1 & -a \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a & a-1 & -a \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a & a-1 & -a \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 0 & 1 \\ a & 2a-1 & -a \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2a-1)\begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 1.$$

Si $2a - 1 = 0$, es decir, si $a = 1/2$, $\text{rg}(A) = 2$.
Si $2a - 1 \neq 0$, es decir, si $a \neq 1/2$, $\text{rg}(A) = 3$.

7.3. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Si A tiene un menor de orden p, no nulo, entonces las p columnas (filas) que determinan tal menor son linealmente independientes.

En efecto, supongamos que el menor de orden p distinto de cero es el determinado por la intersección de sus p primeras filas con sus p primeras columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si las p primeras columnas de A fueran linealmente dependientes, se tendría:

$$\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_p A^p = 0, \text{ con } \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda_i \neq 0$$

para algún λ_i, $1 \leq i \leq p$. Por comodidad, supongamos que $\lambda_1 \neq 0$; entonces:

$$A^1 = \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3 + \cdots + \beta_p A^p \text{ con } \beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1},\ 2 \leq i \leq p,$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{p3} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{pp} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} = \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{p3} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{pp} \end{pmatrix}$$

relación que expresa que la primera columna del menor considerado es combinación lineal de los restantes, en contradicción con el hecho de que son linealmente independientes por ser dicho menor distinto de cero.

7.4. Sea A una matriz cuadrada de orden n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) = 0$ y $A_{nn} \neq 0$, el n-ésimo vector columna de A es combinación lineal de los restantes.

En efecto, desarrollando $\det(A)$ por la última fila:

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = 0 \quad [1]$$

Por la propiedad **4.3** se tiene:

$$\begin{aligned} &a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \cdots + a_{1n}A_{nn} = 0 \\ &a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \cdots + a_{2n}A_{nn} = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n-11}A_{n1} + a_{n-22}A_{n2} + \cdots + a_{n-2n}A_{nn} = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta [1] y las $n - 1$ relaciones anteriores, se tiene que

$$A_{n1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + A_{n2} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + A_{nn} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por ser $A_{nn} \neq 0$, el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los restantes, como queríamos demostrar.

7.5. Sea A una matriz de orden $m \times n$. El rango de A es igual al máximo orden de los menores no nulos.

Demostración

Sea p el máximo orden de los menores no nulos. Entonces existe un menor de orden p distinto de cero. Supongamos que tal menor sea el determinado por la intersección de las p primeras filas con las p primeras columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces, las p primeras columnas de la matriz A son linealmente independientes. Si A tuviese $p + 1$ columnas linealmente independientes, entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} & a_{kk} \end{pmatrix}$$

tendría rango $p + 1$; en consecuencia, su determinante sería distinto de cero, hecho que es una contradicción con la hipótesis de que p es el máximo orden de los menores de A no nulos.

7.6. *Cálculo práctico del rango de una matriz.*

a) Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos cómo se determina el rango de A.

Como la matriz no es la matriz cero, su rango es mayor o igual a 1.

Para determinar si tiene rango mayor o igual a 2, se busca un menor de orden 2 distinto de cero. En este caso el del extremo superior izquierdo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$.

Para determinar si tiene rango 3, partiendo del menor de orden 2 distinto de cero, se estudian todos los posibles menores de orden 3 que lo contengan. Si todos ellos son nulos, el rango de A es 2. Si, por el contrario, alguno de ellos es distinto de cero, el rango de A es 3.

En este caso

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ pero sin embargo } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

En consecuencia, el rango de A es 3.

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 17 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Siguiendo el procedimiento anterior, determinamos en primer lugar un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo, el del extremo inferior izquierdo: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} \neq 0$.

Estudiamos a continuación todos los menores de orden 3 que contengan al anterior menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 17 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Por ser los anteriores menores de orden 3 todos nulos, el rango de B es 2.

Ejemplos:

- Sea $A = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$

  Se va a estudiar el rango de A según los valores del parámetro λ. El rango de A es mayor o igual que 2, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

  Por otra parte, como $\det(A) = \lambda^2 - 3\lambda - 12$ y $\lambda^2 - 3\lambda - 12 = 0$ tiene por soluciones

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{2}$$

  se tiene que:

  a) Si $\lambda \neq \lambda_1$ y $\lambda \neq \lambda_2$, el rango de A es 3.

  b) Si $\lambda = \lambda_1$ o $\lambda = \lambda_2$, el rango de A es 2.

Ejercicios:

1. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices haciendo uso de los determinantes.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices en función del parámetro λ.

a) $A = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix}$ c) $C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda + 3 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

EJERCICIOS FINALES

1. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3 \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

2. Calcular los siguientes determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Determinar, en función del parámetro λ, el rango de cada una de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 & 3 & \lambda \\ 4\lambda-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ 5\lambda-4 & \lambda+1 & 3\lambda-4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda+3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Determinar el valor de α para que los vectores $(1, 2, 5)$, $(1, 1, -1)$ y $(\alpha-1, \alpha+2, \alpha-3)$ sean linealmente dependientes.

5. Determinar el rango de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$.

$$A_1 = \{(-1, 2, 0), (1, -6, 2), (3, -1, 4), (2, -1, 5)\}$$
$$A_2 = \{(4, 1, 5), (1, 2, 6), (-6, 2, 2), (1, 3, 3)\}$$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar $\det(A)$.

SARRUS (Pierre)

Matemático francés (1798-1861). Fue profesor en la Universidad de Estrasburgo (1826-1856) y escribió numerosas obras, principalmente sobre la resolución de ecuaciones numéricas de varias incógnitas y sobre las integrales múltiples.

Una regla muy sencilla para calcular los determinantes de tercer grado lleva su nombre.

TEMA 5
LA REGLA DE CRAMER Y EL TEOREMA DE ROUCHÉ

Se completa en este tema el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, que se inició en el tema 1.

En primer lugar, se da la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa, dando dos métodos de cálculo de la misma: el que utiliza la matriz adjunta y el método de Gauss.

Después de la regla de Cramer, se estudia el teorema de Rouché, que permite averiguar si un sistema es compatible o no antes de resolverlo. Este es un teorema fundamental de esta Unidad, que será utilizado en muchas ocasiones en los temas de Geometría que siguen.

1 CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

1.1. *Matriz adjunta. Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama matriz adjunta de la matriz A, y se representa por $adj(A)$, a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij}.*

Ejemplo:

- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

para hallar la matriz adjunta calculamos los adjuntos de los elementos de A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Análogamente se calculan los adjuntos de los restantes elementos de A:

$$A_{21} = 0\,;\ A_{22} = -2\,;\ A_{23} = -2\,;\ A_{31} = -2\,;\ A_{32} = 4\,;\ A_{33} = 6$$

Entonces: $$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2. Dada una matriz cuadrada A de orden n, sabemos que la matriz cuadrada B de orden n es inversa de A si se verifica $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, donde I_n es la matriz unidad de orden n. En el tema 3 se vio que si la matriz A tiene inversa, ésta es única.

Para el cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada A es fundamental el siguiente teorema, que establece también las condiciones en que la matriz A tiene inversa.

Teorema

Una matriz cuadrada $A(a_{ij})$ de orden n tiene inversa si y sólo si su determinante $|A|$ es distinto de cero.

Demostración

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Si $|A| \neq 0$, su inversa A^{-1} es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A)]^t$, donde $[\text{adj}(A)]^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

En efecto, como la matriz adjunta de toda matriz cuadrada siempre se puede calcular, si $|A| \neq 0$ se puede calcular $\frac{1}{|A|}$, y por tanto la matriz

$$B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Veamos que $B \cdot A = A \cdot B = I$

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \cdot A_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot A_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i2} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \cdot A_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot A_{i2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{in} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \cdot A_{in} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot A_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = I$$

De forma análoga se demuestra que $A \cdot B = I$.

Recíprocamente, supuesto que la matriz A tiene inversa, demostraremos que $|A| \neq 0$.

Para ello calculemos el determinante de ambos miembros de la igualdad $A \cdot A^{-1} = I$.

Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes y $|I| = 1$, se tiene:

$$|A \cdot A^{-1}| = |I|, \text{ es decir, } |A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

Y para que se verifique la última igualdad debe ser $|A| \neq 0$.

Ejemplo:

- Calculemos la matriz inversa de A por el método de la adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para ello procederemos del modo siguiente:

1) Se calcula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

2) Se calcula la matriz adjunta de A (ver **1.1**):

$$\text{adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Se halla la traspuesta de la adjunta y se multiplica por $\frac{1}{|A|}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[\text{adj}\,(A)]^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio:

Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2 EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

2.1. Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad [1]$$

la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se llama matriz de los coeficientes y la matriz

$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ se denomina *matriz ampliada* o *matriz asociada* al sistema.

Si designamos por X la matriz $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y por $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

el sistema [1] se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \text{ es decir, } AX = B$$

2.2. Dado el sistema [1], el sistema que resulta de sustituir por cero todos los términos independientes se llama *sistema homogéneo asociado* al sistema [1].

Ejemplos:

- El sistema S: $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -11 \\ 2x + \ y - 6z = -13 \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

  El sistema homogéneo asociado es S_0: $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 0 \\ 2x + \ y - 6z = 0 \end{cases}$

  La expresión matricial del sistema S es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

• La forma matricial del sistema S_1: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -x - y - 3z = 2 \\ 10x + 6y - 2z = 8 \end{cases}$ es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 10 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La matriz que figura en la expresión anterior es la matriz de los coeficientes.

La matriz ampliada o matriz asociada al sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 10 & 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Como en esta matriz la última fila es combinación lineal de las dos primeras, por ser $(10, 6, -2, 8) = 4(3, 2, 1, 1) + 2(-1, -1, -3, 2)$ se puede suprimir la última ecuación del sistema S_1.

Nota. Es conveniente recordar lo dicho en el tema 1 sobre equivalencia de sistemas.

2.3. *Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss.*

A continuación vamos a calcular la inversa de una matriz por otro método llamado método de Gauss, que se utiliza con frecuencia en la práctica. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $B = (b_{ij})$ es la matriz inversa de A, se ha de verificar

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [1]$$

Designando por $\vec{b}_1 = (b_{11},b_{12},b_{13})$, $\vec{b}_2 = (b_{21},b_{22},b_{23})$, $\vec{b}_3 = (b_{31},b_{32},b_{33})$ y $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ la relación matricial [1] se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \quad [2]$$

que equivale al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 = \vec{e}_1 \\ 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \vec{e}_2 \\ 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 = \vec{e}_3 \end{cases} \quad [3]$$

Restando de la tercera ecuación la primera resulta: $\vec{b}_1 = \vec{e}_3 - \vec{e}_1 = (-1,0,1)$.

Despejando $\vec{b}_2$ de la segunda de [3]:

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 - 2\vec{b}_1 = (0, 1, 0) - (-2, 0, 2) = (0, 1, 0) + (2, 0, -2) = (2, 1, -2)$$

Llevando $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ a la primera se tiene:

$$2\vec{b}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_1 = (7, 2, -6) \Rightarrow \vec{b}_3 = (7/2, 1, -3)$$

Como $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$ son las filas de la matriz inversa $B = A^{-1}$

$$\text{resulta } A^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. Expresar en forma matricial los siguientes sistemas:

$$S_1\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x - y - 7z = -2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad S_2\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases} \quad S_3\begin{cases} x + y - 7z + 8t - v = 4 \\ 2x - y + 5z - 2t + 5v = 6 \\ x + y - 3z - 6t + 4v = 7 \end{cases}$$

2. Utilizando la matriz ampliada, determinar si en cada uno de los sistemas del ejercicio anterior hay alguna ecuación que sea combinación lineal de las demás.

3. Calcular por el método de Gauss la inversa de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3 REGLA DE CRAMER

3.1. Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un *sistema de Cramer si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.*

Ejemplos:

- El sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ no es de Cramer, pues aunque tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

- El sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ es un sistema de Cramer, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

3.2. Consideremos un sistema de Cramer de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad [1]$$

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

o también

$$AX = B$$

Como el sistema es de Cramer, $|A| \neq 0$, y por el teorema de **1.2** existe la matriz A^{-1}, inversa de A, multiplicando los dos miembros de $AX = B$ por A^{-1} por la izquierda, se tiene:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Teniendo en cuenta el valor de A^{-1} (ver **1.2**), la última expresión se puede escribir del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad [2]$$

Operando en el segundo miembro de [2] e igualando, se tiene:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{|A|}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{|A|}$$

Ahora bien, el desarrollo del siguiente determinante por los elementos de la primera columna da el numerador de x_1

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$$

Por ser los adjuntos de los elementos de la primera columna de este determinante los mismos que los adjuntos de los elementos de la primera columna del determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por consiguiente, las expresiones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se pueden escribir en la forma

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \ldots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Se observa que el determinante del denominador está formado por los coeficientes de las incógnitas y que el determinante del numerador de x_i se obtiene cambiando la columna i-ésima del determinante de los coeficientes de las incógnitas por la columna de los términos independientes.

Ejemplo:

- Sea el sistema de las ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Por ser $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ el sistema es de Cramer y se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 0; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -1; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-7} = -3$$

La solución única del sistema es, pues: $(0, -1, -3)$.

Nota. Al resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por la regla de Cramer se utilizan, como se puede ver en el último ejemplo, cuatro determinantes. En general, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas por la regla de Cramer es preciso calcular $n + 1$ determinantes.

Por esta razón, para la resolución numérica de sistemas en que $n > 3$ es preferible el método de Gauss, estudiado en el tema 1.

Ejercicio:

Resolver aplicando la regla de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

4 TEOREMA DE ROUCHÉ

4.1. Consideremos de nuevo el sistema de m ecuaciones con n incógnitas de **2.1.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad [1]$$

Siendo, como allí, A la matriz de los coeficientes y A^* la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Sean $A^1, A^2, \ldots, A^n$ los vectores columna o matrices columna de la matriz A y B el vector columna (matriz columna) de los términos independientes del sistema.

El sistema puede escribirse en la forma

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

es decir,

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = B \quad [2]$$

Resolver el sistema [1] es equivalente a encontrar los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de [2], que permiten escribir el vector B como combinación lineal de los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$. Por consiguiente, el sistema [1] es compatible si y sólo si el vector B es combinación lineal de $A^1, A^2, \ldots, A^n$. Esto equivale a que los subespacios engendrados por $\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}$ y $\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\}$ serían el mismo.

$$L(A^1, A^2, \ldots, A^n) = L(A^1, A^2, \ldots, A^n, B)$$

y, por consiguiente, el rango, que es la dimensión del subespacio, sería el mismo:

$$\text{rg}(A^1, A^2, \ldots, A^n) = \text{rg}(A^1, A^2, \ldots, A^n, B)$$

y recíprocamente, dado que $L(A^1, \ldots, A^n) \subset L(A^1, \ldots, A^n, B)$. Si tienen el mismo rango debe ser $L(A^1, \ldots, A^n) = L(A^1, \ldots, A^n, B)$.

Como estos rangos coinciden con los rangos de las matrices A y A^* se tiene: *que el sistema* [1] *es compatible si y sólo si* $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.

El teorema de Rouché-Frobenius se puede formular también así:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.

4.2. Supongamos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = r$. Esto significa que en las matrices A y A^* hay r columnas y r filas linealmente independientes.

Si suponemos, para simplificar, que son las r primeras filas de la matriz ampliada las que son linealmente independientes, resultará que las $m - r$ filas restantes serán combinaciones lineales de las r primeras, o, lo que es lo mismo, en el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \\ a_{r+11}x_1 + a_{r+12}x_2 + \cdots + a_{r+1n}x_n = b_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [3]$$

Las $m - r$ últimas ecuaciones son combinación lineal de las r primeras y por **3.1** del tema 1 se pueden suprimir, obteniéndose el siguiente sistema equivalente al dado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad [4]$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones principales* del sistema [1].

La matriz de los coeficientes del sistema [4]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

tiene el rango r; por consiguiente (ver tema 4), hay un menor de orden r distinto de cero. Si suponemos que este menor es el formado por las r primeras columnas (lo cual no es ninguna restricción),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces si en el sistema [4] pasamos al segundo miembro las incógnitas $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ (incógnitas cuyos coeficientes no entran en el menor no nulo) se tiene el siguiente sistema equivalente al [4]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad [5]$$

Este sistema [5], que es equivalente al [4] y, por tanto, equivalente al [1], se puede resolver fácilmente dando a las incógnitas $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ valores arbitrarios y aplicando la regla de Cramer o bien el método de Gauss.

Del sistema [5] se deduce que: a) si $r = n$, entonces el sistema es compatible determinado, pues ninguna incógnita podría tomar valores arbitrarios y la regla de Cramer nos daría una sola solución; b) si $r < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado, ya que en este caso habría $n - r$ incógnitas en el segundo miembro de [5], que podrían tomar valores arbitrarios. Se dice entonces que el grado de indeterminación del sistema es $n - r$ o que tiene $n - r$ grados de libertad.

El caso $r > n$ obviamente no se puede dar. ¿Por qué?

Resumiendo:

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas
A: matriz de los coeficientes
A^*: matriz ampliada

$$\begin{cases} \textit{Compatible} \\ \text{si } \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r \begin{cases} \textit{Determinado} \\ \text{Si } r = n \\ \textit{Indeterminado} \\ \text{Si } r < n \end{cases} \\ \\ \textit{Incompatible} \\ \text{Si } \operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^*) \end{cases}$$

Consecuencias

Para que un sistema de n ecuaciones y n incógnitas tenga solución única es necesario y suficiente que el determinante de sus coeficientes sea distinto de cero. En efecto, si hay solución única, el sistema es compatible determinado, y por tanto $r = n$, lo que significa que $|A| \neq 0$.

Recíprocamente, si $|A| \neq 0$, entonces $\operatorname{rg}(A) = n$, y como sólo hay n filas, $\operatorname{rg}(A^*)$ debe ser también n, luego existe solución única.

Ejemplos:

- Sea el sistema

$$S_1 \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 7 \end{cases}$$

Entonces $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Por ser $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Por otra parte: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$

luego $\operatorname{rg}(A^*) = 3$. En consecuencia, el sistema S_1 es incompatible.

- Sea el sistema

$$S_2\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 5y = 7 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

Entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Por ser $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, $\operatorname{rg}(A) = 2$

A su vez, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$; por ello, $\operatorname{rg}(A^*) = 2$. En consecuencia, S_2 es compatible.

Como $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r = 2 =$ número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

- Sea el sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = -1 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2$

La incógnita z, por no entrar en el menor distinto de cero, es no principal y se pasa con los términos independientes.

El sistema equivalente al dado es $\begin{cases} 3x - y = -1 - 3z \\ x + y = 2 + 5z \end{cases}$

Resolviéndolos por la regla de Cramer se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 - 3z & -1 \\ 2 + 5z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 2z}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 - 3z \\ 1 & 2 + 5z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7 + 18z}{4}$$

Haciendo $z = \lambda$, las soluciones del sistema son las ternas de la forma

$$\left(\frac{1 + 2\lambda}{4}, \frac{7 + 18\lambda}{4}, \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

que es la solución general. Si se quiere obtener alguna solución particular, basta dar a λ un valor concreto, por ejemplo, para $\lambda = 0$ se obtiene la solución particular

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 0\right)$$

- Sea el sistema

$$S\begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ 2x - y + 3z + 2t = -1 \\ -4x + 5y - 11z - 4t = 11 \end{cases}$$

En la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & -11 & -4 \end{pmatrix}$ el menor de segundo orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Completando este menor (orlando este menor) con la tercera fila y las columnas segunda y cuarta resultan los menores de tercer orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -11 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$

que al ser nulos, el rango de A es 2.

En la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -11 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ se puede formar a partir del menor de segundo orden anterior, el menor de tercer orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0$; por tanto, en A^* no hay menores de orden 3 no nulos, luego $\operatorname{rg}(A^*) = 2$ y el sistema S es compatible.

Como $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r = 2 < n$ (número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado.

La tercera ecuación del sistema es no principal y se puede eliminar.

Las incógnitas z y t son no principales y se pasan con los términos independientes. Así resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 + z - t \\ 2x - y = -1 - 3z - 2t \end{cases}$$

que se puede resolver aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 + z - t & 1 \\ -1 - 3z - 2t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3 + 2z + 3t}{-3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 + z - t \\ 2 & -1 - 3z - 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9 - 5z}{-3}$$

Haciendo $z = \lambda$, y $t = \mu$ se obtiene la solución general del sistema en la forma

$$\left(\frac{3 - 2\lambda - 3\mu}{3}, \frac{9 + 5\lambda}{3}, \lambda, \mu \right) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Sea $S_1: \begin{cases} x + 2z + t = 1 \\ 3x - y + t = \lambda \\ 2x - y - 2z = 6 \end{cases}$

Entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Por ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ será $\operatorname{rg}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \ \operatorname{rg}(A) = 2.$$

Por otra parte,

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & \lambda \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \lambda - 7$, luego $\operatorname{rg}(A^*) = 2$ para $\lambda = 7$ y $rg(A^*) = 3$ para $\lambda \neq 7$.

En consecuencia, si $\lambda = 7$, S es compatible, y como el rango de A es menor que el número de incógnitas, S_λ es indeterminado.

Si $\lambda \neq 7$, $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^*)$, y por ello S_λ es incompatible.

- Dado el sistema $S \begin{cases} \lambda x + 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 2 \\ 2x + \mu y = 0 \end{cases}$

Calcular λ y μ para que el sistema sea compatible y resolverlo en dicho caso.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & \mu \end{pmatrix} \text{ por ser } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0;\ \text{rg}(A) = 2.$$

Para que el sistema S sea compatible, el rango de la matriz ampliada A^* debe ser también 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

La condición de compatibilidad exige que los menores de orden 3 de A^* sean nulos. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4\lambda - 6 + 3 + 2 - 4 - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & \mu & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8 - 3\mu - 18 - 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = -2$$

Luego si $\lambda \neq -1$ o $\mu \neq -2$, $\text{rg}(A^*) = 3$, y como $\text{rg}(A) = 2$, el sistema es incompatible. Si $\lambda = -1$ y $\mu = -2$, $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) = 2$, y por ello el sistema es compatible. Además, en este caso como el número de incógnitas es 2, el sistema es compatible y determinado.

Para resolver S formamos el sistema de Cramer, cuyas ecuaciones son las correspondientes al menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

Es decir $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ De donde $x = 1$ e $y = 1$

La solución de S es, pues, el par $(1, 1)$.

4.3. *Aplicación a los sistemas homogéneos*

Un sistema homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

tiene siempre la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Como la matriz ampliada tiene la última columna formada por ceros, su rango es igual a la matriz de los coeficientes; por consiguiente, los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

Según el teorema de Rouché se pueden presentar dos casos:

a) $\text{rg}(A) = n$. *En este caso el sistema tiene solución única, la solución trivial* $(0, 0, \ldots, 0)$.
b) $\text{rg}(A) < n$. *En este caso el sistema es compatible indeterminado.*

Consecuencia: Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tendrá sólo la solución trivial si $|A| \neq 0$ y será indeterminado si $|A| = 0$.

Nota. En algunos textos, la terminología para los sistemas homogéneos no coincide con la que se da aquí. Por tener poca relevancia la solución trivial, llaman incompatibles a los sistemas en que $r(A) = n$ y compatibles a los sistemas homogéneos en que $r(A) < n$.

Ejemplos:

- En el sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$; $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\operatorname{rg}(A) = 2$

  Luego $\operatorname{rg}(A) = n$ y el sistema tiene únicamente la solución trivial $(0, 0)$.

- En el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$; $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$; $\operatorname{rg}(A) = 2$

  Entonces $\operatorname{rg}(A) < n$ y el sistema es compatible indeterminado.

- En el sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$; $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

  Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

  y el sistema tiene tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. (Ver *consecuencia* anterior.)

  Como además el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, la tercera ecuación es combinación lineal de los dos primeros y se puede suprimir; la incógnita z (que no entra en el menor distinto de cero) se pasa al segundo miembro y resulta

$$\begin{cases} x + y = z \\ 2x - y = -z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3z}{-3} = -z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3z}{-3} = z$$

  La solución general son las ternas $(-z, z, z)$, con $z \in \mathbb{R}$, o bien haciendo $z = \lambda$, $(-\lambda, \lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

  El conjunto de todas las ternas de la forma anterior es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

  En general (ver tema 1), el conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo con n incógnitas es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIOS FINALES

1. Expresar por medio de tres igualdades los siguientes sistemas expresados en forma matricial.

$$S_1\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad S_3\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S_2\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 6 & 4 & 5 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_4\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 13 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Aplicar el método de reducción de Gauss para calcular, cuando corresponda, las soluciones de los sistemas del ejercicio anterior.

3. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones según el valor del parámetro λ y resolverlos en los casos que corresponda:

$$S_1\begin{cases} \lambda x - 2y = -1 \\ 2x - y - \lambda z = 1 \\ -x + 2z = 1 \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x + y = 2\lambda \\ 3x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

$$S_3\begin{cases} 3x + y + \lambda z = 2 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \qquad S_4\begin{cases} -x - \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 5 \\ 2x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

4. Discutir y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema, de acuerdo con los valores de b:

$$S\begin{cases} (b-1)x + (b-1)y = b \\ bx + (b-1)y = b - 1 \end{cases}$$

5. Discutir y resolver el siguiente sistema de acuerdo con los valores del parámetro m:

$$S\begin{cases} x + 2y - 5z + mt = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 0 \\ mx - 7y + z - 6t = 0 \end{cases}$$

6. Sea el sistema

$$S\begin{cases} (m^2-1)x + (m+1)^2 y = m + 1 \\ (m+1)x + (m-1)y = m + 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutirlo, encontrando los posibles valores de m para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, respectivamente.

b) Resolverlo en el caso en que sea compatible determinado.

7. Dado el sistema

$$S\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 2 \\ 2x + by = 0 \end{cases}$$

Calcular a y b para que sea compatible y determinado.

8. Calcular el valor de p que hace compatible el siguiente sistema:

$$S\begin{cases} 2x + y - 4z = p \\ 2y - z = p \\ y + z = 6 \\ 3x - 2z = 11 \end{cases}$$

Resolver el sistema para dicho valor de p.

9. Sea el sistema

$$S\begin{cases} 2x_1 - kx_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ kx_1 - x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases}$$

Calcular el valor del parámetro k para que el sistema sea compatible e indeterminado.

10. Discutir los siguientes sistemas y resolverlos en el caso que corresponda:

$$S_1\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 11 \\ -9x - 2y = 11 \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 5z = -12 \\ 6y - 7z = -9 \\ -2x + y - 6z = -18 \end{cases}$$

11. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro m y resolverlo en el caso que corresponda utilizando la regla de Cramer.

$$S\begin{cases} -x - mz = m \\ x - y - 3z = 5 \\ 2x - my = 0 \end{cases}$$

12. Estudiar según los valores del parámetro b el sistema

$$S\begin{cases} 6x + 18y - bz = 0 \\ 7x - 2y - 4z = 0 \\ 4x + 10y - 6z = 0 \end{cases}$$

y resolverlo en el caso de tener solución distinta de la trivial.

13. Discutir y resolver en caso de compatibilidad el siguiente sistema:

$$S\begin{cases} 5x - 11y + 9z = k \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

CRAMER (Gabriel)

Matemático suizo (1704-1752). Escribió un tratado sobre «geometría analítica». El estudio de la intersección de curvas planas le condujo a la resolución de sistemas de ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones lineales con determinante no nulo llevan su nombre.

ROUCHÉ (Eugène)

Matemático francés (1832-1910). Escribió algunos tratados de alcance didáctico sobre álgebra (ecuaciones, sistemas) y realizó investigaciones sobre la teoría de funciones, integrales definidas y probabilidad y el método de los isoperímetros.

UNIDAD 2

ESPACIOS AFÍN Y EUCLÍDEO TRIDIMENSIONALES

El objetivo fundamental de esta Unidad es el estudio del espacio afín y el espacio euclídeo tridimensionales.

Se inicia la Unidad con el estudio de las diferentes ecuaciones de la recta y del plano en el espacio afín.

A lo largo de esta Unidad se utilizan constantemente los recursos algebraicos que se introdujeron en la primera. Así, los problemas de incidencia se reducen al estudio de relaciones vectoriales o a relaciones entre rangos de matrices.

Por esta razón, antes de abordar esta Unidad es necesario manejar con cierta soltura los sistemas de ecuaciones, rango de vectores y de matrices y los determinantes de tercer orden.

El producto escalar, que asocia a cada par de vectores libres un número real, se introduce en la forma clásica, para llegar después a su expresión analítica. Este producto permite estudiar los problemas de ángulos y distancias.

Los problemas de cálculo de áreas y volúmenes se abordan más fácilmente utilizando el producto vectorial y el producto mixto, que se estudian en el tema 8.

El estudio de las transformaciones geométricas se hace marcando el acento en las propiedades geométricas, para llegar después a las expresiones analíticas.

El tema de curvas y superficies se reduce al estudio de los casos más sencillos.

Finaliza la Unidad con la consideración elemental de otros tipos de sistemas de referencia, coordenadas polares y cilíndricas.

TEMA 6
LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO AFÍN

Este tema está dedicado al estudio de las figuras más simples del espacio afín: la recta y el plano. Después de un apartado dedicado a recordar el concepto de espacio afín y los sistemas de referencia afín, ya estudiados en cursos anteriores, se estudia la recta y se deducen las diversas formas de su ecuación (vectorial, paramétrica, implícita). Finalmente, se hace un estudio análogo para el plano abordando las diversas formas de su determinación.

1 VECTORES EN EL PLANO

Un vector fijo es un segmento cuyos extremos se dan en un cierto orden y viene determinado por su módulo (longitud del segmento que lo origina), dirección (dirección de la recta que lo contiene) y sentido (sentido de recorrido u orden en que se dan sus extremos).

Sobre este conjunto $\mathbf{V}$ se definía la relación de equivalencia de ser equipolentes, entendiendo que un vector es equipolente a otro cuando ambos coinciden en módulo, dirección y sentido. El conjunto cociente resultante de esta relación de equivalencia es el conjunto $\mathbf{V}^3$ de los vectores libres del espacio.

Al igual que sobre $\mathbf{V}^2$ (conjunto de los vectores libres del plano), sobre $\mathbf{V}^3$ se define de la forma ordinaria la suma de vectores y la multiplicación por un número real.

De esta forma $\mathbf{V}^3$ adquiere estructura de espacio vectorial real de dimensión 3.

Recordemos asimismo que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos de $\mathbf{V}^3$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si y sólo si tienen representantes paralelos.

2 COORDENADAS DE UN PUNTO EN EL ESPACIO

2.1. Consideremos el espacio vectorial $\mathbf{V}^3$ de los vectores libres en el espacio. Recordemos (ver **Santillana**, 2.º BUP) que el espacio afín E_3 es la terna $(E, \mathbf{V}^3, p)$, en donde E es el conjunto de los puntos del espacio ordinario y p la aplicación.

$p\colon E \times E \longrightarrow \mathbf{V}^3$

$(A,B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}$, que verifica

a) $p(A,B) + p(B,C) + p(C,A) = \vec{0}$, para cualesquiera $A, B, C \in E$.

b) Fijado $O \in E$, la aplicación

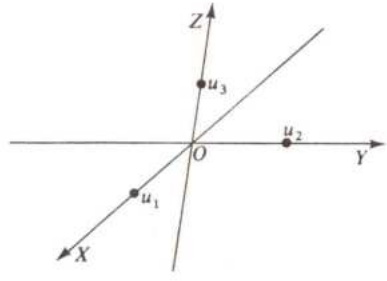
$p_0\colon E \longrightarrow \mathbf{V}^3$

$A \longrightarrow p_0(A) = p(O,A) = \overrightarrow{OA}$ es una biyección.

2.2. Recordemos también que si O es un punto fijo de E y $\mathscr{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbf{V}^3$, se llama *sistema de referencia afín* al conjunto $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Por medio de esta referencia afín todo punto P del espacio afín queda unívocamente determinado por una terna ordenada de números reales (x, y, z), que son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y que reciben el nombre de coordenadas cartesianas del punto P. Es decir, si $\overrightarrow{OP} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$, las coordenadas de P son (x, y, z).

Si (x, y, z) son las coordenadas de un punto P, se escribe $P(x, y, z)$. Análogamente, si (v_1, v_2, v_3) son las coordenadas de un vector $\vec{v} \in \mathbf{V}^3$ con respecto a las bases $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se escribe $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una referencia afín del espacio E_3. Si U_1, U_2 y U_3 son tres puntos del espacio tales que $\overrightarrow{OU}_1 = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{OU}_2 = \vec{u}_2$ y $\overrightarrow{OU}_3 = \vec{u}_3$, o, lo que es lo mismo, tales que sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ son, respectivamente, (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), las rectas OU_1, OU_2 y OU_3 reciben el nombre de ejes de coordenadas. La recta OU_1 se llama eje X, la recta OU_2, eje Y y la recta OU_3, eje Z (Fig. 1).



(Fig. 1)

Por su parte, el punto O se denomina origen de coordenadas y obviamente sus coordenadas son (0, 0, 0).

2.3. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín. Entonces:

a) Si A es un punto arbitrario de E_3, se llama vector de posición del punto A al vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Si (x, y, z) son las coordenadas del punto A, entonces $\vec{a} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$, es decir, las coordenadas de un punto coinciden con las coordenadas de su vector de posición respecto de la base correspondiente.

b) Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos arbitrarios de E_3 y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son sus respectivos vectores de posición, entonces $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$; en consecuencia:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{u}_1 + (y_2 - y_1)\vec{u}_2 + (z_2 - z_1)\vec{u}_3$$

Es decir, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son las coordenadas cartesianas del punto B menos las coordenadas del punto A. Las coordenadas del vector libre $[\overrightarrow{AB}]$ son las coordenadas de cualquiera de sus representantes.

Nota. En lo que sigue, y para simplificar la notación, siempre que se hable de coordenadas de un punto y de las coordenadas de un vector se supondrá que está fijado un sistema de referencia afín $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, aunque no se haga mención explícita de ello.

Ejemplos:

- Sean $A(4, 1, -5)$ y $B(2, -6, 3)$; entonces:

  $\vec{a} = 4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 5\vec{u}_3$, $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ y $\overrightarrow{AB} = (2-4)\vec{u}_1 + (-6-1)\vec{u}_2 + (3+5)\vec{u}_3 =$

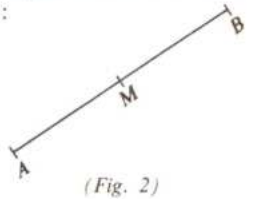
  $= -2\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 + 8\vec{u}_3$.

- Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{AB}$. Las coordenadas del punto medio $M(x, y, z)$ se obtienen del modo siguiente:

  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ (Fig. 2)

  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = 2(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, de donde

  $$x = \frac{x_2 + x_1}{2},\ y = \frac{y_2 + y_1}{2},\ z = \frac{z_2 + z_1}{2}$$



(Fig. 2)

  Así las coordenadas del punto medio $M(x, y, z)$ del segmento $\overline{AB}$:

  $A(-2, -1, -1)$, $B(-1, 4, -2)$ son:

  $$x = \frac{-2 + (-1)}{2} = \frac{-3}{2},\ y = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2},\ z = \frac{-1 + (-2)}{2} = \frac{-3}{2}$$

- Hallar las coordenadas de los puntos M y N que dividen al segmento $\overline{AB}$: $A(-1, 2, 1)$, $B(-4, 8, 4)$ en tres partes iguales (Fig. 3).

(Fig. 3)

Solución

Sean $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$

$(-3, 6, 3) = 3(x_1 + 1, y_1 - 2, z - 1)$

de donde

$$x_1 = 2,\ y_1 = 4,\ z_1 = 2$$

Luego $M(-2, 4, +2)$

Como N es el punto medio del segmento $\overline{MB}$, sus coordenadas son:

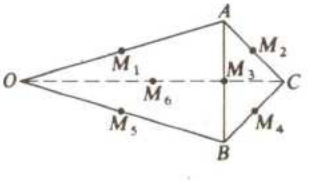
$$x_2 = \frac{-2 + (-4)}{2} = -3;\ y_2 = \frac{4 + 8}{2} = 6;\ z_2 = \frac{+2 + 4}{2} = 3$$

$$N(-3, 6, 3)$$

Ejercicios:

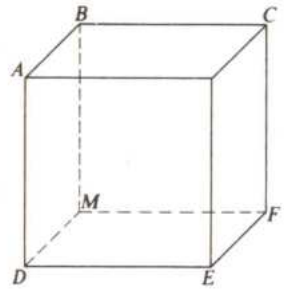
1. Fijado un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, sean $A(-1, 5, 4)$, $B(2, -1, 6)$, $C(4, 1, 7)$ y $D(8, -9, 2)$ cuatro puntos de E_3. Determinar las coordenadas de los vectores de posición de los puntos A, B, C y D. Determinar las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{BD}$.

2. Dado el tetraedro de la figura 4, se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$. Determinar respecto de $\mathcal{R}$ las coordenadas de los puntos O, A, B y C y de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6, siendo cada uno de ellos el punto medio del segmento señalado al que pertenece.



(Fig. 4)

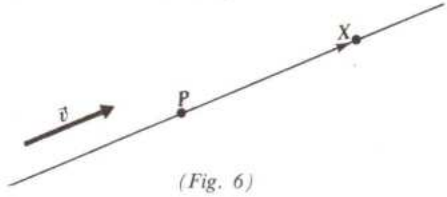
3. Dado el cubo de la figura 5, se considera el sistema de referencia $\mathbb{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. Determinar las coordenadas de los ocho vértices del cubo.



(Fig. 5)

3 LA RECTA EN EL ESPACIO AFÍN

3.1. Sea P un punto del espacio afín y $\vec{v}$ un vector libre no nulo. *La recta que pasa por P y tiene la dirección del vector $\vec{v}$* se define como el conjunto de todos los puntos X del espacio tales que $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ (Fig. 6).



(Fig. 6)

El par $(P,\vec{v})$ se denomina una *determinación lineal* de dicha recta.

Si tomamos $\lambda = 0$, se verifica que $\vec{0} = \overrightarrow{PP} = 0 \cdot \vec{v}$, luego P es un punto que pertenece a la recta de determinación $(P,\vec{v})$. Si un punto X pertenece a la recta se dirá que *la recta pasa por X*. De lo anterior se observa que la recta pasa siempre por el punto de su determinación.

3.2. Sea r la recta de determinación $(P,\vec{v})$ y r' la de determinación $(Q,\vec{u})$; entonces $r = r'$ *si y sólo si existen números reales* t_0 *y* s_0 *tales que* $\vec{u} = t_0\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ} = s_0\vec{v}$.

Supongamos $r = r'$; recordemos que $r = \{X | \overrightarrow{PX} = \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $r' = \{X' | QX' = \mu\vec{u}, \mu \in \mathbb{R}\}$; como $Q \in r' = r$, existe un número real s_0 tal que $\overrightarrow{PQ} = s_0\vec{v}$.

Sea $X \in r$ el punto obtenido en r tomando $\lambda = 1$, es decir, $\overrightarrow{PX} = \vec{v}'$, como $r = r'$, $X \in r'$, debe existir un $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{QX} = \mu\vec{u}$. De la relación:

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}$$

resulta: $\vec{v} = s_0\vec{v} + \mu\vec{u}$, de donde $\vec{u} = \mu^{-1}(1 - s_0)\vec{v}$.

Tomando $t_0 = \mu^{-1}(1 - s_0)$ resulta $\vec{u} = t_0\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ} = s_0\vec{v}$.

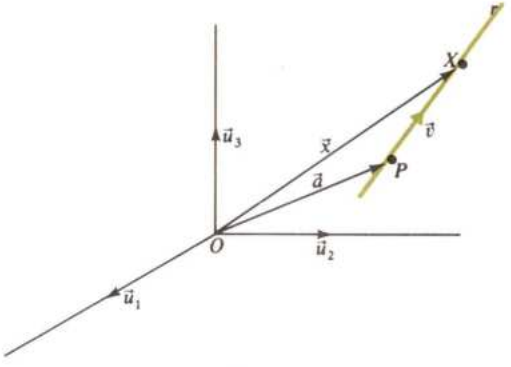
(Hemos supuesto $\mu \neq 0$; si $\mu = 0$, entonces $X = Q$, y por tanto, $\vec{v} = \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} = -\lambda\vec{u}$ y el resultado sigue manteniéndose.)

Recíprocamente, si $\vec{u} = t_0\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ} = s_0\vec{v}$, veamos que $r = r'$. Sea $X \in r$, para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{v}$ de la relación $\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PX} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PX} = -s_0\vec{v} + \lambda\vec{v} = (-s_0 + \lambda)\vec{v} = (-s_0 + \lambda)t_0^{-1}\vec{u}$ se deduce que $X \in r'$. (Obsérvese que $t_0 \neq 0$, ya que en caso contrario $\vec{u} = \vec{0}$, contradiciendo la condición de que el vector de la determinación lineal de una recta es siempre no nulo.)

De forma análoga se demuestra que $X \in r'$ implica $X \in r$, y por tanto, $r = r'$.

3.3. *Ecuaciones vectorial, paramétrica y continua de la recta.*

Supongamos $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín de E_3 y consideremos la recta r de determinación lineal $(P,\vec{v})$ (Fig. 7).



(Fig. 7)

La condición necesaria y suficiente para que el punto X pertenezca a la recta r es que exista un número real t tal que $\overrightarrow{PX} = t\vec{v}$.

Llamando $\vec{x}$ al vector $\overrightarrow{OX}$ y $\vec{a}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, la condición necesaria y suficiente para que el punto X pertenezca a r es

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}} \quad [1]$$

Esta ecuación se denomina *la ecuación vectorial* de la recta r.

Si las coordenadas de X son (x, y, z), las de $P(x_0, y_0, z_0)$ y las de $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, entonces las coordenadas del vector $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ son (x, y, z) y las de $\vec{a} = \overrightarrow{OP}\,(x_0, y_0, z_0)$, luego:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$$

de donde:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad [2]$$

que son las *ecuaciones paramétricas* de la recta r.

Ejemplos:

- Sea r la recta que pasa por el punto de coordenadas $(3, -7, 4)$ y tiene al vector de coordenadas $(-1, 2, 5)$ como vector de dirección. Entonces:

$$r: (x, y, z) = (3, -7, 4) + t(-1, 2, 5), \text{ de donde } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -7 + 2t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$$

- Sea $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ un vector no nulo. Las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el origen y tiene a $\vec{v}$ como vector de dirección resultan:

$$\begin{cases} x = tv_1 \\ y = tv_2 \\ z = tv_3 \end{cases}$$

3.4. Sea $X(x, y, z)$ un punto distinto de $A(x_0, y_0, z_0)$. *X es un punto de la recta r cuyo sistema de ecuaciones paramétricas es* [2] *si y sólo si el sistema de tres ecuaciones y una incógnita t:*

$$\begin{aligned} tv_1 &= x - x_0 \\ tv_2 &= y - y_0 \\ tv_3 &= z - z_0 \end{aligned}$$

es compatible determinado, lo cual equivale a decir que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} v_1 & x-x_0 \\ v_2 & y-y_0 \\ v_3 & z-z_0 \end{pmatrix} = 1$$

Si suponemos que $v_1 \neq 0$, entonces la anterior relación es cierta si y sólo si

$$\begin{vmatrix} v_1 & x-x_0 \\ v_2 & y-y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} v_1 & x-x_0 \\ v_3 & z-z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad [3]$$

de donde $\begin{cases} v_1(y-y_0) = v_2(x-x_0) \\ v_1(z-z_0) = v_3(x-x_0) \end{cases}$

igualdades que siendo además $v_2 \neq 0$ y $v_3 \neq 0$, se acostumbra a escribirlas como

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}}$$

y reciben el nombre *de ecuaciones continuas de la recta r.*

Ejemplos:

- Sea r la recta cuya determinación lineal es $(A, \vec{v})$, siendo $A(3, -2, 5)$ y $\vec{v}(-1, 4, 5)$.

  Entonces $r: (x, y, z) = (3, -2, 5) + t(-1, 4, 5)$ con $t \in \mathbb{R}$.

  Luego las ecuaciones paramétricas de r son: $r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$

  y las ecuaciones continuas resultan: $r = \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-5}{5}$

- Sea r_1 la recta cuyas ecuaciones continuas son

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{6} = \frac{z+4}{-7}$$

Las ecuaciones paramétricas de r se obtienen igualando a t las anteriores igualdades, es decir,

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{6} = \frac{z+4}{-7} = t$$

de donde

$$r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 6t + 5 \\ z = -7t - 4 \end{cases}$$

es decir: $(x, y, z) = (-1, 5, 4) + t(2, 6, -7)$ con $t \in \mathbb{R}$

3.5. Volvamos a considerar los dos determinantes nulos de [3]. Se tiene entonces que

$$\begin{cases} v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0 \\ v_3 x - v_1 z = v_3 x_0 - v_1 z_0 \end{cases} \quad [4]$$

Llamando $m = \dfrac{v_2}{v_1}$; $p = \dfrac{-v_2}{v_1} x_0 + y_0$; $n = \dfrac{v_3}{v_1}$; $q = \dfrac{-v_3}{v_1} x_0 + z_0$

el sistema [4] toma la forma

$$\begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases}$$

en donde z e y aparecen en función de x. Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones reducidas* respecto de x.

Ejemplos:

- Sea r la recta cuya determinación lineal es $(A, \vec{v})$, siendo $A(-1, 5, 6)$ y $\vec{v}(4, -8, 12)$. Entonces, las ecuaciones continuas de r son:

$$r: \frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-6}{12}$$

de donde

$$4(y - 5) = -8(x + 1)$$
$$4(z - 6) = 12(x + 1)$$

luego las ecuaciones reducidas de r resultan: $r: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = 3x + 9 \end{cases}$

- Sea r la recta cuyas ecuaciones reducidas son:

$$r: \begin{cases} y = -5x + 2 \\ z = 8x - 9 \end{cases}$$

Entonces:

$$x = \frac{y-2}{-5}; \; x = \frac{z+9}{8}$$

luego las ecuaciones continuas de r son $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z+9}{8}$

- Sea r la recta dada por

$$r\colon (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(-2, 0, 0)$$

De acuerdo con el párrafo anterior,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & x+1 \\ 0 & y-2 \\ 0 & z-3 \end{pmatrix} = 1. \qquad \text{Por tanto } \begin{vmatrix} -2 & x+1 \\ 0 & y-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & x+1 \\ 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ son las ecuaciones reducidas de r.

- Sea r la recta dada por

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Entonces, tomando $x = t$ se tiene:

$r\colon (x, y, z) = (t, 4t - 2, 3) = (0, -2, 3) + t(1, 4, 0)$, luego r es la recta cuya determinación lineal es $(A, \vec{v})$, siendo $A(0, -2, 3)$ y $\vec{v}(1, 4, 0)$.

Ejercicios:

1. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r cuya determinación lineal es $(A, \vec{v})$, siendo:
   a) $A(-5, 4, 0)$ y $\vec{v}(2, -5, 6)$
   b) $A(4, -3, 7)$ y $\vec{v}(8, -6, 2)$
   c) $A(0, 0, 0)$ y $\vec{v}(-1, 4, 0)$
   d) $A(0, 0, 1)$ y $\vec{v}(1, 0, 0)$
   e) $A(-1, 2, 3)$ y $\vec{v}(0, 1, 0)$

2. Sean las rectas

$$r\colon \begin{cases} x = -3t + 8 \\ y = 4t - 6 \\ z = 6t + 1 \end{cases} ; \quad r'\colon \begin{cases} x = -7t - 9 \\ y = 4t + 9 \\ z = 7t - 2 \end{cases} ; \quad r''\colon \begin{cases} x = -8t - 2 \\ y = -6t + 2 \\ z = 4t + 1 \end{cases}$$

Determinar las ecuaciones continuas respecto de cada una de ellas.

3. Sean las rectas

$$r\colon \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 4 + t \\ z = 7t + 1 \end{cases} ; \quad r'\colon \begin{cases} x = 6t - 1 \\ y = 4t \\ z = 6 - t \end{cases} ; \quad r''\colon \begin{cases} x = -1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -3t - 3 \end{cases}$$

Determinar las ecuaciones continuas respecto de cada una de ellas.

4. Calcular una determinación lineal de cada una de las siguientes rectas:

$$r\colon \begin{cases} x = 3y + 8 \\ z = -6y + 1 \end{cases} ; \quad r'\colon \begin{cases} y = 3x + 2 \\ z = -6x + 5 \end{cases} ; \quad r''\colon \begin{cases} x = 6z + 1 \\ y = 7 \end{cases}$$

5. Expresar en forma paramétrica las ecuaciones de las rectas del ejercicio anterior.

---

4 RECTA DETERMINADA POR DOS PUNTOS

Dados dos puntos distintos A y B del espacio afín, existe una recta y sólo una que los contiene.

En efecto, la recta de determinación lineal $(A,\overrightarrow{AB})$ pasa por los puntos A y B, ya que

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Veamos que es la única. Sea r otra recta que pasa por A y B y de determinación lineal $(P,\vec{v})$; dado que A y B pertenecen a r, existen números reales λ y μ tales que $\overrightarrow{PA} = \lambda\vec{v}$ y $\overrightarrow{PB} = \mu\vec{v}$; entonces:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = (\mu - \lambda)\vec{v}$$

Tomando $t_0 = \mu - \lambda$ y $s_0 = \lambda$ en **3.2**, resulta que las rectas $(A,\overrightarrow{AB})$ y $(P,\vec{v})$ coinciden.

De esta demostración se deduce que la recta determinada por A y B tiene determinación lineal $(A,\overrightarrow{AB})$; de aquí que si respecto de un sistema de referencia afín las coordenadas de A son (x_0, y_0, z_0) y las de B son (x_1, y_1, z_1), entonces las de $\overrightarrow{AB}$ son $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, y por tanto las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por A y B son

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

En el caso en que $x_1 - x_0 \neq 0$, $y_1 - y_0 \neq 0$, $z_1 - z_0 \neq 0$, las ecuaciones en forma continua de r son:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ejemplos:

- Fijado un sistema de referencia, sea $A(-1, 2, 5)$ y $B(4, 8, 6)$. Entonces la recta r determinada por los puntos A y B tiene por vector de dirección el vector de coordenadas $(4 + 1, 8 - 2, 6 - 5) = (5, 6, 1)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 + 6t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$, y las ecuaciones continuas de r son:

$$\frac{x + 1}{5} = \frac{y - 2}{6} = \frac{z - 5}{1}$$

Ejercicios:

1. Sean $A(-1, 5, 6)$, $B(4, 5, 8)$ y $C(4, 6, 7)$. Determinar los vectores de dirección de las rectas AB, BC y CA. Hallar las ecuaciones paramétricas de las rectas AB, BC y CA.

2. Demostrar que los puntos $A(4, 5, 7)$, $B(-1, 2, 3)$ y $C(9, 8, 11)$ están alineados.

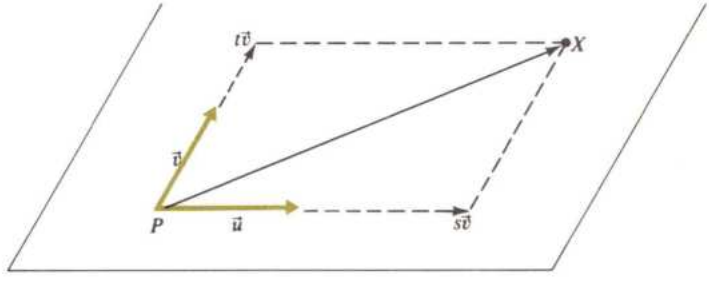
3. Demostrar que los puntos $A(-1, 8, 7)$, $B(4, 1, 5)$ y $C(-7, 6, 5)$ no están alineados.

4. Sean $A(4, -1, 3)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, -1, 6)$. Hallar las ecuaciones de las rectas medianas del triángulo $\overset{\frown}{ABC}$.

5. Sean $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 1, 5)$ y $C(-7, 6, 3)$. Expresar las ecuaciones de las rectas AB y AC en forma paramétrica y en forma reducida.

5 EL PLANO EN EL ESPACIO AFÍN

5.1. Sea P un punto del espacio afín y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores libres linealmente independientes. (Obsérvese que esta condición implica que ambos vectores son no nulos y no proporcionales.) *El plano que pasa por P determinado por* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ es el conjunto de puntos X para los que existen números reales s y t tales que $\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}$ (Fig. 8).



Plano de determinación $(P, \vec{u}, \vec{v})$
(Fig. 8)

Tomando $s = t = 0$, resulta $\vec{0} = \overrightarrow{PP} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, es decir, que P pertenece a dicho plano.

El triple $(P, \vec{u}, \vec{v})$ se denomina una *determinación* lineal de dicho plano.

Si X es un punto que pertenece a un plano, se dice que dicho plano pasa por X.

5.2. Sean π y π' dos planos de determinaciones lineales respectivas $(P, \vec{u}, \vec{v})$ y $(Q, \vec{u}', \vec{v}')$; entonces, $\pi = \pi'$ si y solamente si existen números reales t_0, t_1, t_2, s_0, s_1, s_2 tales que

$$1)\ \vec{u} = s_0\vec{u}' + t_0\vec{v}',\ 2)\ \vec{v} = s_1\vec{u}' + t_1\vec{v}' \text{ y } 3)\ \overrightarrow{PQ} = s_2\vec{u}' + t_2\vec{v}'$$

Supongamos $\pi = \pi'$; como $P \in \pi$, entonces $P \in \pi'$, y por tanto existen números reales λ_2, μ_2 tales que $\overrightarrow{QP} = \lambda_2\vec{u}' + \mu_2\vec{v}'$; luego $\overrightarrow{PQ} = -QP = (-\lambda_2)\vec{u}' + (-\mu_2)\vec{v}'$.

Tomando $s_2 = -\lambda_2$ y $t_2 = -\mu_2$, resulta la tercera relación.

Sea $X \in \pi$ tal que $\overrightarrow{PX} = \vec{u}$; entonces, $X \in \pi'$, luego $\overrightarrow{QX} = \lambda_1\vec{u}' + \mu_1\vec{v}'$, y de la relación $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}$ se deduce: $\vec{u} = -\lambda_2\vec{u}' + (-\mu_2)\vec{v}' + \lambda_1\vec{u}' + \mu_1\vec{v}' = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{u}' + (\mu_1 - \mu_2)\vec{v}'$.

Tomando $s_1 = \lambda_1 - \lambda_2$ y $t_1 = \mu_1 - \mu_2$, resulta la primera relación. De forma análoga se obtiene la segunda.

Recíprocamente, supongamos verificadas las relaciones del enunciado; tenemos que demostrar que $\pi = \pi'$. Sea $X \in \pi$, entonces, $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, de donde $\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PX} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PX} = s_2\vec{u}' + t_2\vec{v}' + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = s_2\vec{u}' + t_2\vec{v}' + \lambda(s_0\vec{u}' + t_0\vec{v}') + \mu(s_1\vec{u}' + t_1\vec{v}') = (s_2 + \lambda s_0 + \mu s_1)\vec{u}' + (t_2 + \lambda t_0 + \mu t_1)\vec{v}'$, y por tanto, $X \in \pi'$.

La demostración de que $X \in \pi'$ implica que $X \in \pi$ es análoga, teniendo en cuenta que $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ se pueden despejar en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ver ejercicio 1 de este apartado).

5.3. Sea $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín, π el plano de determinación lineal $(P, \vec{u}, \vec{v})$ y X un punto. Si llamamos $\vec{x}$ al vector $\overrightarrow{OX}$ y $\vec{a}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, *la condición necesaria y suficiente para que el punto X pertenezca al plano π es que existan números reales s y t tales que* $\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}$. Teniendo en cuenta la relación $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$ (Figura 9) se tiene que

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}} \quad [1]$$

que es la *ecuación vectorial* del plano π.

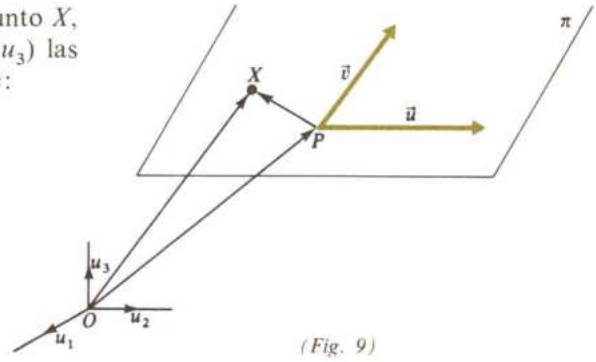
Si (x, y, z) son las coordenadas del punto X, (x_0, y_0, z_0) las del punto P, (u_1, u_2, u_3) las de $\vec{u}$ y (v_1, v_2, v_3) las de $\vec{v}$, se tiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

de donde

$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases} \quad [2]$$

que son las *ecuaciones paramétricas* del plano π.



(Fig. 9)

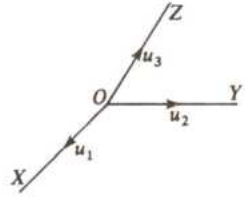
Ejemplos:

- De acuerdo con la figura 10, las ecuaciones paramétricas del plano XY son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \text{ con } t, s \in \mathbb{R}$$

Análogamente, plano YZ $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases}$ con $t, s \in \mathbb{R}$

y plano XZ $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases}$ con $t, s \in \mathbb{R}$



(Fig. 10)

- Sea π el plano cuya determinación lineal es $(A, \vec{u}, \vec{v})$, siendo $A(4, -3, 2)$, $\vec{u}(-2, 1, 2)$ y $\vec{v}(-3, 2, 5)$. Las ecuaciones paramétricas de π resultan entonces

$$\begin{cases} x = 4 - 2t - 3s \\ y = -3 + t + 2s \\ z = 2 + 2t + 5s \end{cases} \text{ con } t, s \in \mathbb{R}$$

Para $t = 1$ y $s = 0$ se obtiene el punto $M(2, -2, 4)$.

Si ahora elegimos dos vectores $\vec{u}' = -2\vec{u} = (4, -2, -4)$ y $\vec{v}' = 3\vec{v} = (-9, 6, 15)$, proporcionales, respectivamente, a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se obtiene una nueva determinación lineal del mismo plano $(M, \vec{u}, \vec{v})$; utilizando el punto M y los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t - 9s \\ y = -2 - 2t + 6s \\ z = 4 - 4t + 15s \end{cases} \text{ con } t, s \in \mathbb{R}$$

En este ejemplo se observa que a un plano se le pueden asociar una infinidad de ecuaciones paramétricas.

- Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 2 - 2t + 4s \\ z = -1 + 3t - 6s \end{cases}$$

no representan un plano porque los vectores $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 4, -6)$ son paralelos, ya que $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Se puede probar que las ecuaciones anteriores representan una recta; en efecto, escribiendo las ecuaciones en la forma

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + (t - 2s)1 \\ y = 2 + (t - 2s)(-2) \\ z = -1 + (t - 2s)3 \end{array}\right\} \text{ y haciendo } t - 2s = \lambda \text{ se tiene: } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y cuyo vector de dirección es $(1, -2, 3)$.

5.4. Veamos qué condición han de cumplir las coordenadas (x, y, z) de un punto X para que pertenezca al plano π de ecuaciones paramétricas [2] de **5.3**.

Los parámetros t y s, al variar, proporcionan en [2] las coordenadas (x, y, z) de cada punto del plano.

Recíprocamente, si (x, y, z) es un punto del plano, existen dos valores, uno de t y otro de s, que sustituidos en [2] verifican las ecuaciones. Por consiguiente, un punto $X(x, y, z)$ pertenece al plano π de ecuaciones paramétricas [2] si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas s y t:

$$\begin{cases} u_1 s + v_1 t = x - x_0 \\ u_2 s + v_2 t = y - y_0 \\ u_3 s + v_3 t = z - z_0 \end{cases}$$

es *compatible*, lo cual equivale a decir que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x - x_0 \\ u_2 & v_2 & y - y_0 \\ u_3 & v_3 & z - z_0 \end{pmatrix}. \quad \text{Como} \quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

por ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores linealmente independientes, se tiene que el sistema tendrá solución si y sólo si

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-x_0 \\ u_2 & v_2 & y-y_0 \\ u_3 & v_3 & z-z_0 \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [3]$$

cada una de estas relaciones expresa la ecuación del plano π, que viene determinado por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por medio de un determinante.

Desarrollando por la tercera columna el primer determinante de [3] resulta:

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Haciendo $A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$; $B = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$ resulta

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Eliminando paréntesis y llamando $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ se tiene:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad [4]$$

que es la *ecuación implícita o general* del plano.

Como los vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ son linealmente independientes, alguno de los coeficientes A, B o C será distinto de cero. Recíprocamente, una ecuación de la forma $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ que no tiene nulos los tres coeficientes A', B' y C' es la ecuación de un plano. En efecto, supongamos que $A' \neq 0$; entonces:

$$x = -\frac{B'}{A'}\, y - \frac{C'}{A'}\, z - \frac{D'}{A'}$$

Para cada valor de y, z se obtiene un punto; si hacemos $y = s$ y $z = t$ queda:

$$\begin{cases} x = \dfrac{B'}{A'}\, s - \dfrac{C'}{A'}\, t - \dfrac{D'}{A'} \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $\left(-\frac{D'}{A'}, 0, 0\right)$ y es paralelo a los vectores $\left(-\frac{B'}{A'}, 1, 0\right)$ y $\left(-\frac{C'}{A'}, 0, 1\right)$, que son dos vectores no paralelos, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Ejemplos:

- Sea π el plano cuya determinación lineal es $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

  Siendo $A(-1, 2, 5)$, $\vec{u}(4, 1, 6)$ y $\vec{v}(-3, 2, 1)$, la ecuación de π es:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & x+1 \\ 1 & 2 & y-2 \\ 6 & 1 & z-5 \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir, } x + 2y - z + 2 = 0$$

- Las rectas r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ y r': $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ pasan por el punto $A(1, -2, 3)$ y sus vectores de dirección son $\vec{v}(2, -1, 1)$ y $\vec{v}'(3, 1, 2)$; por tanto, $(A, \vec{v}, \vec{v}')$ es una determinación lineal del plano que contiene a r y r'. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & x-1 \\ -1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir, } 3x - y - 5z + 14 = 0$$

Ejercicios:

1. Demostrar que si $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores linealmente independientes, $\vec{u}', \vec{v}'$ lo son también y $\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v}$ y $\vec{v}' = c\vec{u} + d\vec{v}$; entonces se pueden despejar $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en función de $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$.

2. Sea π el plano cuya determinación lineal es $(A, \vec{u}, \vec{v})$, siendo $A(-1, 2, 3)$, $\vec{u}(-1, 4, 5)$ y $\vec{v}(2, -2, 7)$. Determinar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de π.

3. Sean r y r' las rectas de ecuaciones r: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+5}{-1}$; r': $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+5}{-2}$

   Determinar la ecuación general del plano que contiene a las rectas r y r'.

4. Sea π el plano de ecuación $3x - 4y + 5z + d = 0$. Sabiendo que π contiene al punto $A(-4, 3, 6)$, determinar d.

5. Sea π el plano de ecuaciones $\begin{cases} x = 5 + 3t - 2s \\ y = -2 + 4t - 5s \\ z = 6 - t + s \end{cases}$

   Determinar dos puntos del plano π. Calcular la ecuación de dos rectas secantes contenidas en π. Expresar π mediante su ecuación general.

6. Sea r la recta de ecuación r: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{7}$. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r.

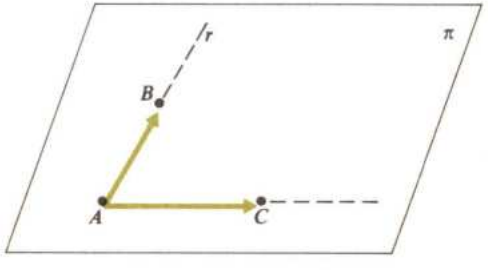
6 PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS

Si A, B y C son tres puntos no alineados del espacio afín E_3, existe un único plano π que los contiene (Fig. 11).

En efecto, consideremos el plano π de determinación lineal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. De las relaciones

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$$

se sigue que el plano π pasa por A, B y C.



(Fig. 11)

Sea π' otro plano que pasa por A, B y C de determinación lineal $(P, \vec{u}, \vec{v})$; dado que $A \in \pi'$

$$\overrightarrow{PA} = s_2\vec{u} + t_2\vec{v}, \ (s_2, t_2 \in \mathbb{R})$$

Como B y C pertenecen a π', $\overrightarrow{PB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ y $\overrightarrow{PC} = \lambda'\vec{u} + \mu'\vec{v}$; entonces:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = -s_2\vec{u} - t_2\vec{v} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda - s_2)\vec{u} + (\mu - t_2)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = -s_2\vec{u} - t_2\vec{v} + \lambda'\vec{u} + \mu'\vec{v} = (\lambda' - s_2)\vec{u} + (\mu' - t_2)\vec{v}$$

Entonces, por **5.2**, $\pi = \pi'$.

El plano cuya determinación lineal es $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ es, pues, el único plano que contiene a los puntos A, B y C.

La ecuación vectorial de π resulta entonces $\vec{x} = \vec{a} + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$, con $t, s \in \mathbb{R}$, si las coordenadas de A, B, C son $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) + s(c_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) + s(c_3 - a_3) \end{cases}$$

La ecuación del plano π expresada por medio de un determinante es entonces la forma

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & x - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & y - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Este determinante es igual al siguiente

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & x - a_1 \\ a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & y - a_2 \\ a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando la primera columna a cada una de las restantes se obtiene la ecuación del plano que pasa por tres puntos mediante un determinante de orden 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x \\ a_2 & b_2 & c_2 & y \\ a_3 & b_3 & c_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación del plano que pasa por los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$.

Si un punto $D(d_1, d_2, d_3)$ está en el plano determinado por $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación anterior. Por consiguiente, para que cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios se ha de verificar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

Condiciones para que cuatro puntos sean coplanarios.

Si este determinante es distinto de cero, los cuatro puntos forman un tetraedro.

Ejemplos:

- Sean $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 1, 6)$ y $C(2, -1, 3)$. Entonces:

$$\overrightarrow{AB} = (4 + 1, 1 - 2, 6 - 3) = (5, -1, 3); \overrightarrow{AC} = (2 + 1, -1 - 2, 3 - 3) = (3, -3, 0)$$

La ecuación del plano cuya determinación lineal es $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ resulta

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & x+1 \\ -1 & -3 & y-2 \\ 3 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; 3x + 3y - 4z + 9 = 0$$

- Averigüemos si los cuatro puntos $A(1, 2, -1)$, $B(1, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(0, 2, 4)$ son coplanarios. Veamos si se cumple la condición para que los cuatro puntos sean coplanarios.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Sumamos a la última fila la opuesta de la primera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

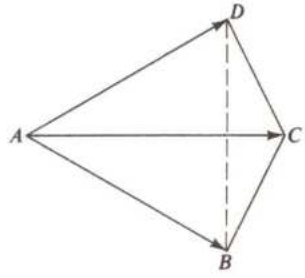
Los cuatro puntos no son coplanarios, sino que forman un tetraedro (Fig. 12).

También se puede resolver el problema en la forma siguiente:

Se calculan los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 5)$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, los tres vectores son linealmente independientes, y por consiguiente no coplanarios.



(Fig. 12)

- Hallar el valor de m para que los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, 3, -1)$, $C(1, 0, 1)$ y $D(-1, 2, m)$ sean coplanarios.

Si los cuatro puntos son coplanarios los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, m)$ deben ser linealmente dependientes; por consiguiente:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{vmatrix} = 0; \text{ es decir, } 2m + 2 = 0; \; m = -1$$

Ejercicios:

1. Sean $A(4, 5, -7)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-2, 1, 3)$. Demostrar que los puntos A, B y C no están alineados y determinar la ecuación del plano ABC.

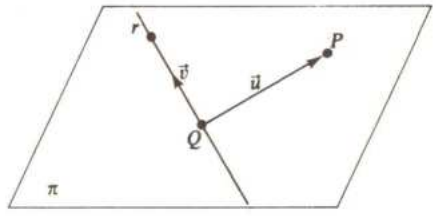
2. Sean $A(-2, 3, 5)$, $B(4, -1, 6)$ y $C(7, 3, 9)$. Calcular la ecuación del plano determinado por A, B y C. Expresar dicho plano por medio de sus ecuaciones paramétricas.

7 OTRAS DETERMINACIONES DEL PLANO

7.1. *Plano determinado por una recta y un punto exterior a ella.*

Sea r una recta y P un punto no perteneciente a ella. Existe un plano y sólo uno que pasa por el punto y contiene a la recta (Fig. 13).

Supongamos que $(Q,\vec{v})$ es una determinación de la recta r. Consideremos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{QP}$ y $\vec{v}$. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, ya que en caso contrario $\overrightarrow{QP} = \lambda\vec{v}$ y entonces P pertenecería a la recta r.



(Fig. 13)

Dado que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, $(Q,\vec{u},\vec{v})$ es una determinación lineal para un plano π. Como $\overrightarrow{QP} = \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + 0\vec{v}$, se sigue que $P \in \pi$.

Sea X un punto de r; entonces para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{QX} = \lambda\vec{v}$, luego $\overrightarrow{QX} = 0 \cdot \vec{u} + \lambda\vec{v}$ y $X \in \pi$, luego todos los puntos de r pertenecen a π y r está contenda en π.

Además π es el único plano que contiene a r y pasa por P, ya que si π' fuese otro plano con estas propiedades, eligiendo dos puntos distintos de A y B, π' y π pasarían por P, A y B (que no están alineados) y por **6**, $\pi = \pi'$.

Ejemplos:

- Consideremos la recta r de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

  y el punto $P = (0, 1, 1)$, $P \notin r$. La recta r tiene una determinación lineal dada por $(Q, \vec{v})$, donde $Q = (1, 0, -1)$ (tomar $t = 0$) y $\vec{v} = (3, 2, 1)$; entonces el vector $\overrightarrow{QP}$ es el vector $(-1, 1, 2)$ y el plano determinado por P y r tendrá la determinación lineal $(Q, \overrightarrow{QP}, \vec{v})$; entonces sus ecuaciones paramétricas serán: $\begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = s + 2t \\ z = -1 + 2s + t \end{cases}$ cuya ecuación general es: $3x - 7y + 5z + 2 = 0$.

- Consideremos la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ y el punto $P(0, 0, 1)$. Para hallar la ecuación del plano determinado por r y P podemos proceder como en el ejemplo anterior, teniendo en cuenta que la recta tiene una determinación lineal dada por $(Q, \vec{v})$, donde $Q = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$; otro método es hallar dos puntos de la recta, por ejemplo $(1, 0, 1)$ y $(3, 3, 5)$ (hacer $y = 0$ e $y = 3$, respectivamente); entonces el plano pedido es el que pasa por $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(3, 3, 5)$, cuya ecuación es:

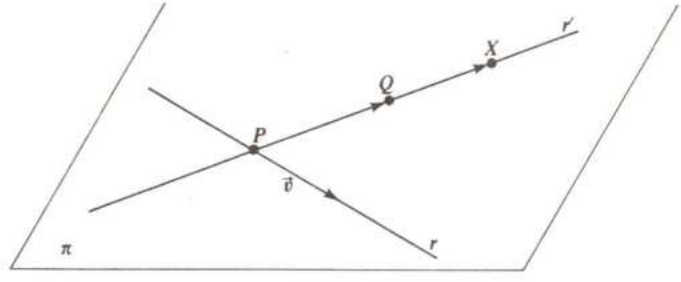
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & x \\ 0 & 0 & 3 & y \\ 1 & 1 & 5 & z \end{vmatrix} = 0$$

de donde: $4y - 3z + 3 = 0$.

7.2. *Plano determinado por dos rectas que se cortan.*

Sean r y r' dos rectas que se cortan en un punto P; entonces existe un plano y sólo uno que contiene a ambas rectas.

En efecto, sea Q un punto de r' que no pertenece a r; por el apartado **7.1** existe un plano π que pasa por Q y contiene a r. Veamos que r' está contenida en π. Sea $X \in r'$; entonces $\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ (Fig. 14).



(Fig. 14)

De **7.1** sabemos que una determinación lineal de π es $(P, \overrightarrow{PQ}, \vec{v})$, donde $\vec{v}$ es un vector no nulo de r; entonces, $\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{PQ} + 0 \cdot \vec{v}$ y $X \in \pi$.

La unicidad de π es consecuencia de **6**, ya que otro plano que contuviera a las dos rectas tendría con π tres puntos en común.

Ejemplo:

- Las rectas r y r' de ecuaciones paramétricas

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = \quad t \end{cases} \quad \text{y} \quad r' = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \quad t \\ z = \quad t \end{cases}$$

se cortan en el punto (2, 1, 1).

En efecto, si las rectas se cortan en $P(x_0, y_0, z_0)$, por estar P en r debe existir $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 = 1 + t;\ y_0 = 2 - t;\ z_0 = t.$$

y por estar P en r' debe existir $s \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = 1 + s;\ y_0 = s;\ z_0 = s$.

Entonces:

$$\begin{cases} 1 + t = 1 + s \\ 2 - t = s \\ \quad t = s \end{cases}$$

sistema compatible cuya solución es $t = 1$ y $s = 1$, que da el punto (2, 1, 1).

La ecuación del plano π determinado por r y r' será la del plano de determinación lineal $(P, \overrightarrow{PQ}, \vec{v})$, donde $P(2, 1, 1)$ y Q es un punto de r' distinto de P, por ejemplo $Q(1, 0, 0)$; luego $\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{v}$ es un vector no nulo de r, $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Las ecuaciones paramétricas de π serán

$$\begin{cases} x = 2 - s + t \\ y = 1 - s - t \\ z = 1 - s + t \end{cases} \quad \text{cuya forma implícita es } x - z - 1 = 0.$$

EJERCICIOS FINALES

1. Se considera la recta r dada por $r: \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

   Expresar r en forma paramétrica y en forma reducida.

2. Sea la recta r dada por $r: \begin{cases} x = 3t + 8 \\ y = 5t - 2 \\ z = 6t + 1 \end{cases}$

   Expresar r en forma continua y en forma reducida.

3. Hallar las intersecciones de la recta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

   con los planos XY, XZ, YZ.

4. Determinar si las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{2}$ y $r': \dfrac{x}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ se cortan.

5. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(-1, 7, 3)$.

6. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3, 5)$ y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, 0, 2)$, $N(3, 6, 4)$.

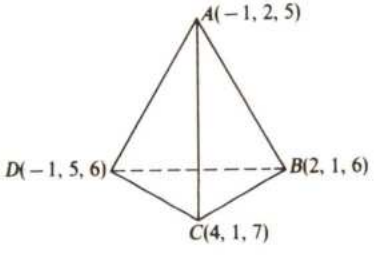
7. Demostrar que la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$

   está contenida en el plano $x - y + 2z - 4 = 0$

8. Sea π el plano cuya determinación lineal es $(P, \vec{u}, \vec{v})$, donde $P(-3, 2, 7)$, $\vec{u}(4, 1, 5)$ y $\vec{v}(-7, 6, 3)$.
   Encontrar las ecuaciones vectorial, general y paramétricas de π.
   Hallar dos rectas secantes contenidas en dicho plano.

9. Hallar la ecuación implícita del plano determinado por los puntos $A(-4, 3, -5)$, $B(2, -3, 1)$, $C(2, 7, 6)$.

10. De acuerdo con la figura 15, determinar las ecuaciones de los planos que contienen a las caras del tetraedro $ABCD$ y encontrar las ecuaciones paramétricas de las aristas.



(Fig. 15)

11. Ver si las rectas r y r' de ecuaciones

$$r:\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - 3y + z - 8 = 0 \end{cases} \qquad r':\begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 8x + 5y - 8z - 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan, encontrando, en caso afirmativo, el punto de corte.

12. Encontrar la ecuación del plano π determinado por la recta

$$r:\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

y el punto (0, 6, 3).

13. Encontrar la ecuación del plano π determinado por la recta

$$r:\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

y el punto (0, 1, 4).

14. Se consideran las rectas de ecuación

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$$

$$r': \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$$

Demostrar que se cortan en un punto y encontrar la ecuación del plano que determinan.

15. Encontrar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$ y el punto (2, 1, 4)

16. Encontrar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$$ y el punto (0, 6, −1).

17. Demostrar que las rectas

$$r:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad r':\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}$$

se cortan en un punto. Encontrar dicho punto y hallar la ecuación del plano determinado por r y r'.

18. Encontrar la ecuación del plano determinado por las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad r':\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

TEMA 7 RELACIONES DE INCIDENCIA EN EL ESPACIO

En cursos anteriores se han estudiado los problemas de incidencia en el plano. En este tema se presentan tres tipos de problemas de incidencia en el espacio: entre planos, entre plano y recta y entre rectas. Todos ellos se estudian caracterizando en cada caso la posición relativa de estos entes geométricos en función de sus respectivas determinaciones lineales y en función de sus ecuaciones implícitas (cartesianas).

1 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

1.1. Dos planos π y π' se dicen *paralelos* si son iguales o bien si no tienen ningún punto común. Es decir, $\pi \,//\, \pi'$ si y sólo si $\pi = \pi'$ o $\pi \cap \pi' = \varnothing$.

1.2. Consideremos los planos π y π' de ecuaciones implícitas respectivas

$$\begin{aligned} \pi&: \; Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi'&: \; A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}$$

Los dos planos tienen algún punto común si y sólo si el sistema formado por sus ecuaciones es compatible.

Formemos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Como los coeficientes A, B, C de la ecuación de un plano no pueden ser todos nulos, los posibles rangos de la matriz M son 2 o 1.

Caso 1

$$\operatorname{rg}(M) = 2 \quad \text{y} \quad \operatorname{rg}(M') = 2$$

Por el teorema de Rouché, el sistema es compatible indeterminado; en este caso los planos tienen algún punto común.

Como $\operatorname{rg}(M) = 2$, algún menor de segundo orden de M debe ser distinto de cero; supongamos

$\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} \neq 0$, entonces, aplicando la regla de Cramer, las soluciones del sistema son

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -D & -Ax & C \\ -D' & -A'x & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} D & C \\ D' & C' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} x}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} B & -D & -Zx \\ B' & -D' & -A'x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}$$

haciendo

$$m = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}; \quad p = -\frac{\begin{vmatrix} D & C \\ D' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}; \quad n = -\frac{\begin{vmatrix} B & A \\ B' & A' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}; \quad q = -\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ B' & D' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}$$

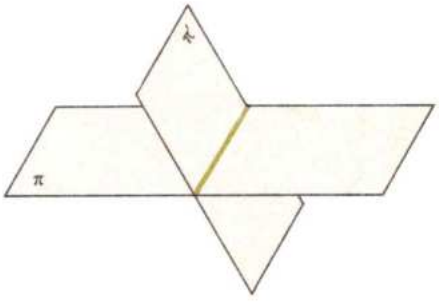
resulta que las soluciones del sistema vienen dadas por:

$$\begin{cases} y = p + mx \\ z = q + nx \end{cases}$$

Haciendo $x = t$, las soluciones del sistema son las ternas (x,y,z) tales que

$$\begin{cases} x = t \\ y = p + mt \\ z = q + nt \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

pero éstas son las ecuaciones paramétricas de una recta; por tanto, los planos π y π' se intersecan en una recta (Fig. 1).



(Fig. 1)

Dado que si $\text{rg}(M) = 2$, necesariamente $\text{rg}(M') = 2$, resulta que si $\text{rg}(M) = 2$, entonces los dos planos deben intersecarse en una recta.

Ejemplo:

- Sean los planos π y π' de ecuaciones:

$$\pi: 3x + 2y - 6z - 7 = 0$$
$$\pi': 4x - y + z + 2 = 0$$

Por ser $\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, π y π' se intersecan en una recta r. Para hallar la ecuación de r procedemos como ya se indicó:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 + 6z \\ 4x - y = -2 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 + 6z & 2 \\ -2 - z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 + 6z \\ 4 & -2 - z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$$

de donde:

$$r: \begin{cases} x = \frac{3}{11} + \frac{4}{11}z \\ \\ y = \frac{34}{11} + \frac{27}{11}z \end{cases} \quad \text{o} \quad r: \begin{cases} x = \frac{3}{11} + \frac{4}{11}t \\ y = \frac{34}{11} + \frac{27}{11}t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Caso 2

$$r(M) = 1, \quad r(M') = 1$$

En este caso el sistema resulta de nuevo compatible indeterminado.

En este caso el vector (A',B',C',D') debe ser proporcional al (A,B,C,D); por tanto, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$, ya que no todos los coeficientes son 0) tal que $(A',B',C',D') = \lambda(A,B,C,D)$, de donde $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$, $C' = \lambda C$, $D' = \lambda D$, y la ecuación del segundo plano resulta

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$$

y como $\lambda \neq 0$, se tiene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

es decir, que los dos planos tienen la misma ecuación, por tanto son iguales. En este caso π y π' son paralelos y además iguales, y se dice que π y π' son *coincidentes*.

Ejemplo:

- Sean $\pi: 2x + 3y - z + 8 = 0$
  $\pi': -4x - 6y + 2z - 16 = 0$

  Como $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 8 \\ -4 & -6 & 2 & 16 \end{pmatrix} = 1$, los planos π y π' son coincidentes.

Caso 3

$$\operatorname{rg}(M) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{rg}(M') = 2$$

En este caso el sistema no tiene solución, y por tanto los planos no tienen ningún punto común y son paralelos y no coincidentes, $\pi \,//\, \pi'$.

Ejemplo:

- Sean los planos

$$\begin{aligned} \pi &: 3x - y + z = -1 \\ \pi' &: 6x - 2y + 2z = 7 \end{aligned}$$

  entonces

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

  Por tanto, π y π' son paralelos y no coincidentes.

1.3. Resumiendo los casos anteriores, las posiciones relativas de dos planos en el espacio son:

π y π' *se intersecan en una recta*: $r(M) = r(M') = 2$
π y π' *coincidentes*: $r(M) = r(M') = 1$
π y π' *paralelos no coincidentes*: $r(M) = 1$, $r(M') = 2$

(Obsérvese que dos planos nunca pueden cortarse en un único punto.)

Si ninguno de los coeficientes es cero, la condición

$$r\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$

se puede escribir como

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

luego en este caso:

1) π y π' son coincidentes si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$

2) π y π' son paralelos no coincidentes si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

Ejemplos:

- Sea π el plano de ecuación π: $3x - 5y + z - 2 = 0$. Determinemos la ecuación del plano π' paralelo a π y que contiene al punto $A(-3, 2, 4)$.
  La ecuación de π' es de la forma

  $$3x - 5y + z + D = 0$$

  y como $A \in \pi'$ se tiene $3(-3) - 5 \cdot 2 + 4 + D = 0$, de donde $D = 15$.

- Sea π el plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ y π' el plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es paralelo a π. π' es de la forma $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, como el lector puede comprobar fácilmente.
  En consecuencia, la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a π es de la forma $Ax + By + Cz = 0$.

1.4. Supongamos dados los planos π y π' por sus respectivas determinaciones lineales: $(P,\vec{u},\vec{v})$ y $(P',\vec{u}',\vec{v}')$; entonces, $\pi \,/\!/\, \pi'$ si y sólo si $\operatorname{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'\} = 2$.

Supongamos $\operatorname{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'\} = 2$; como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, $\operatorname{rg}\{\vec{u},\vec{v}\} = 2$, y por tanto, si $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ deben ser combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, existen números reales a,b,c,d tales que:

$$\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v}$$
$$\vec{v}' = c\vec{u} + d\vec{v}$$

Si $\pi = \pi'$, entonces $\pi \,/\!/\, \pi'$ (planos paralelos coincidentes). Supongamos $\pi \neq \pi'$; si π y π' no fuesen paralelos, tendrían un punto común X.

Sea Y un punto de π'; entonces, $\overrightarrow{P'Y} = t\vec{u}' + s\vec{v}'$ $(t, s \in \mathbb{R})$.

De la relación $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XP'} + \overrightarrow{P'Y}$

$$\text{como } X \in \pi' \quad \overrightarrow{P'X} = \lambda\vec{u}' + \mu\vec{v}' \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$
$$\text{como } X \in \pi \quad \overrightarrow{PX} = m\vec{u} + n\vec{v} \ (m, n \in \mathbb{R})$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PY} &= m\vec{u} + n\vec{v} - \lambda\vec{u}' - \mu\vec{v} + t\vec{u}' + s\vec{v}' = \\ &= m\vec{u} + n\vec{v} - \lambda(a\vec{u} + b\vec{v}) - \mu(c\vec{u} + d\vec{v}) + t(a\vec{u} + b\vec{v}) + s(a\vec{u} + b\vec{v}) = \\ &= (m - \lambda a - \mu c + ta + sa)\vec{u} + (n - \lambda b - \mu d + tb + sb)\vec{v}\end{aligned}$$

Esto nos dice que $Y \in \pi$, y por tanto todo punto de π' pertenece a π, es decir, $\pi' \subset \pi$, pero entonces los planos tienen al menos tres puntos comunes, y por tanto $\pi = \pi'$; esto es una contradicción con nuestra suposición de que $\pi \neq \pi'$, y por tanto π y π' no tienen puntos comunes y deben ser paralelos.

La demostración de que si $\pi \,//\, \pi'$ $\operatorname{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'\} = 2$ la dejamos como ejercicio.

Resumiendo lo anterior obtenemos que

i) $\pi \,//\, \pi'$ si y sólo si $\operatorname{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'\} = 2$.

ii) π y π' se intersecan si y sólo si $\operatorname{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'\} = 3$.

Ejemplos:

- Sea π el plano de ecuaciones paramétricas

$$\pi: \begin{cases} x = 5 - 3t + 2s \\ y = 6 + 2t - s \\ z = 7 - t + 5s \end{cases}$$

y π' el de ecuaciones

$$\pi': \begin{cases} x = 2 + 7s \\ y = 6 + t - 3s \\ z = -5 + 13t + 24s \end{cases}$$

Entonces $\vec{u} = (-3, 2, -1)$, $\vec{v} = (2, -1, 5)$, $\vec{u}' = (0, 1, 13)$, $\vec{v}' = (7, -3, 24)$.

Como $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 7 & -3 & 24 \end{pmatrix} = 2$, resulta que $\pi // \pi'$.

- Sea π el plano de ecuaciones paramétricas

$$\pi: \begin{cases} x = 6 - 4t + s \\ y = -7 + 3t - s \\ z = 1 + 5t + 2s \end{cases}$$

La ecuación del plano π' paralelo a π y que pasa por el origen será:

$$\pi': \begin{cases} x = -4t + s \\ y = 3t - s \\ z = 5t + 2s \end{cases}$$

y análogamente la del plano π'' paralelo a π que pasa por $(-6, 3, 1)$ es

$$\pi'': \begin{cases} x = -6 - 4t + s \\ y = 3 + 3t - s \\ z = -1 + 5t + 2s \end{cases}$$

1.5. Como se ha demostrado en los apartados precedentes, la posición relativa en que se encuentran dos planos queda determinada por la discusión del sistema de ecuaciones lineales por sus ecuaciones implícitas.

De la misma forma, la posición relativa que pueden adoptar tres planos se determina mediante la discusión del correspondiente sistema de ecuaciones lineales que se forma con sus ecuaciones. Consideremos como aclaración los siguientes

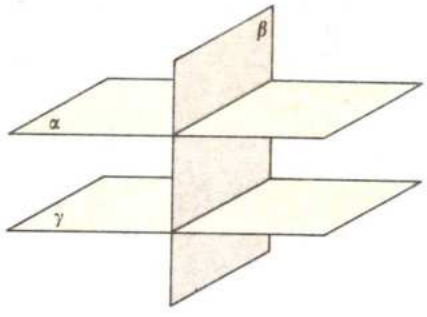
Ejemplos:

- Sean los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: 2x + y - z + 6 = 0 \\ \beta&: 3x - y + z + 5 = 0 \\ \gamma&: 4x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Por ser $\text{rg}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$

y $\text{rg}(M') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$



(Fig. 2)

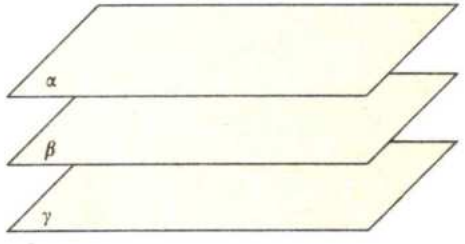
el sistema es incompatible, y por tanto los tres planos carecen de puntos comunes. Por otra parte, como α y γ son paralelos, los planos adoptan la posición de la figura 2.

- Sean los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ \beta&: 4x - 2y + 6z + 5 = 0 \\ \gamma&: -2x + y - 3z + 7 = 0 \end{aligned}$$

Por ser $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M') = 2$, el sistema es incompatible, y por tanto los tres planos carecen de puntos comunes.

Como α, β y γ son paralelos y distintos, los planos adoptan la posición de la figura 3.



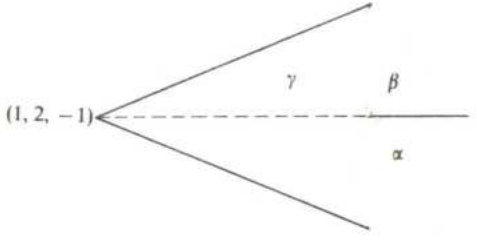
(Fig. 3)

- Sean los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: x + y + z - 2 = 0 \\ \beta&: 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ \gamma&: x + 2y + z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Por ser $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3$, el sistema es compatible y determinado. (Compruébese.)

En consecuencia, los planos α, β y γ forman un triedro (Fig. 4) cuyo vértice es el punto $(1, 2, -1)$, que se obtiene al resolver el sistema por la regla de Cramer.



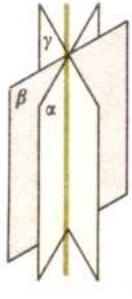
(Fig. 4)

- Sean los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: x + y - z + 2 = 0 \\ \beta&: 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ \gamma&: 3x + 2z + 7 = 0 \end{aligned}$$

Por ser $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 2$, el sistema es compatible e indeterminado.

En este caso, los planos tienen infinitos puntos en común, es decir, los planos tienen una recta en común (Fig. 5) cuyos puntos tienen por coordenadas las soluciones del sistema.



(Fig. 5)

- Sean los planos α, β y γ de ecuaciones

$$\begin{array}{lrcl} \alpha: & x + y + z & = & m + 1 \\ \beta: & mx + y + (m-1)z & = & m \\ \gamma: & x + my + z & = & 1 \end{array}$$

con $m \in \mathbb{R}$. Entonces

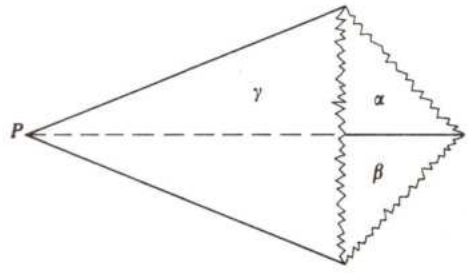
$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $\det(M) = m - 1$. Por tanto:

a) Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$, y en consecuencia, los planos α, β y γ concurren en un único punto P (Fig. 6), es decir, forman un triedro cuyas coordenadas, utilizando la regla de Cramer, resultan

$$x = \frac{-m^3 + m^2 + 2m - 1}{m - 1};$$

$$y = \frac{-m}{m - 1};$$

$$z = \frac{m(m^2 - 1)}{m - 1} = m(m + 1)$$



(Fig. 6)

b) Si $m = 1$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\text{rg}(A) = 2$

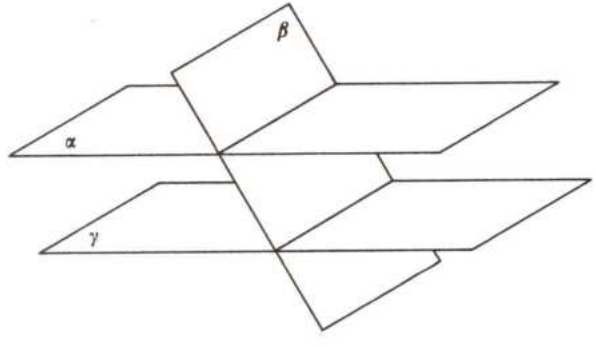
Por ser

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \ \text{rg}(A^*) = 3$$

En consecuencia, α, β y γ no tienen en este caso ningún punto en común.

Teniendo en cuenta los coeficientes de α, β y γ se tiene entonces que α y γ son paralelos y distintos, ya que $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1}$.

Por tanto, α, β y γ ocupa la posición de la figura 7.



(Fig. 7)

Ejercicios:

1. Sean π y π' los planos de ecuaciones:

$$\pi: 3x - y + 5z - 11 = 0$$
$$\pi': 4x + y + 7z + 12 = 0$$

   a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r que determinan.

   b) Determinar la ecuación del plano α paralelo a π que pasa por el punto $(-4, 3, 2)$.

   c) Idem del plano β paralelo a π' que pasa por el punto $(1, 2, 3)$.

2. Sea r la recta determinada por la intersección de los planos

$$\pi: 3x - y + 2z + 1 = 0$$
$$\pi': 4x + y - 5z + 12 = 0$$

   Determinar sus ecuaciones paramétricas y sus ecuaciones continuas.

3. Sean α y β los planos de ecuaciones

$$\alpha: 3x + y + 5z + 6 = 0$$
$$\beta: 6x + \lambda y + (\lambda + 8)z = 0$$

   Determinar su posición relativa de acuerdo con los valores del parámetro λ.

4. Sean los planos de ecuaciones

$$\pi: \begin{cases} x = -1 - t + 4s \\ y = 2 + 5t - s \\ z = 5 + 3t + 6s \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi': \begin{cases} x = 2 + 6t + 5s \\ y = -1 - 11t + 13s \\ z = 3 + 2t + 18s \end{cases}$$

   Se pide:

   a) Averiguar si π y π' son paralelos.

   b) Ecuaciones del plano α paralelo a π que pasa por $(-4, 3, 2)$.

5. Sean las rectas

$$r: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+8}{5} \quad \text{y} \quad r': \frac{x+5}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{6}$$

   Hallar la ecuación del plano π que pasa por $(4, -1, 3)$ y es paralelo al determinado por r y r'.

6. Sean los planos de ecuaciones

$$\alpha: mx + 2z - 2 = 0$$
$$\beta: 5x + 2y - 1 = 0$$
$$\gamma: x - 2y + mz - 3 = 0$$

   Estudiar la posición relativa de α, β y γ de acuerdo con los valores del parámetro m.

7. Determinar el valor del parámetro m para que los planos

$$\alpha: mx + y - z = 0$$
$$\beta: x + 3y + z = 0$$
$$\gamma: 3x + 10y + 4z = 0$$

   se intersequen en una recta.

8. Determinar la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: 3x - y + 2z = 1 \\ \beta&: x + 4y + z = b \\ \gamma&: 2x - 5y + az = -2 \end{aligned}$$

de acuerdo con los valores de los parámetros a y b.

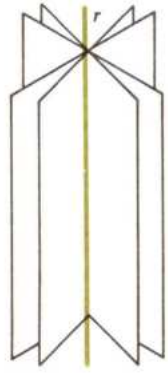
9. Demostrar que los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: 2y - z = 7 \\ \beta&: 3x - 2z = 9 \\ \gamma&: y + z = 6 \end{aligned}$$

concurren en un punto. Determinar las coordenadas de dicho punto.

2 HAZ DE PLANOS

Dada una recta r, se define el haz de planos de arista r como el conjunto de los planos que contienen a la recta r (Fig. 8).



(Fig. 8)

Supongamos que una recta r viene expresada por medio de la ecuación de dos planos π y π'

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases}$$
$$\text{con } \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$$

Si m y n son números reales no simultáneamente nulos, la relación $m(Ax + By + Cz + D) + n(A'x + B'y + C'z + D') = 0$ [1] corresponde a la ecuación de un plano cuya ecuación general resulta

$$(mA + nA')x + (mB + nB')y + (mC + nC')z + mD + nD' = 0$$

Todo plano cuya ecuación sea de la forma [1] pertenece al haz de planos de arista r.

En efecto, si $P(x_0,y_0,z_0)$ es un punto arbitrario de r, sus coordenadas satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones de r; en consecuencia,

$$m(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + n(A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D') = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Esta relación muestra que todo plano cuya ecuación sea de la forma [1] contiene a la recta r, ya que contiene a cada uno de sus puntos.

La expresión $m(Ax + By + Cz + D) + n(A'x + B'y + C'z + D') = 0$ con $m, n \in \mathbb{R}$ y no simultáneamente nulos, recibe el nombre de *ecuación del haz de planos de arista r*, ya que para cada uno de los valores de m y n se obtiene la ecuación de un plano perteneciente a dicho haz.

Observemos que para $n = 0$ se obtiene la ecuación del plano π. En consecuencia, excluyendo este plano, todos los restantes del haz se pueden obtener por la expresión

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad [2]$$

siendo $\lambda = \dfrac{m}{n}$ y $n \neq 0$.

Como veremos en los ejemplos que siguen, la expresión [2] resulta más operativa que la [1] al depender sólo de los valores de un parámetro λ.

Ejemplos:

- Sea r la recta dada por $r: \begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$

  Determinemos la ecuación del plano π, que pertenece al haz de arista r y que pasa por el punto $P(6, 7, 0)$.

  La ecuación de π es la forma $\lambda(3x - y + z + 1) + x + 3y - z + 3 = 0$

  Como $P \in \pi$, se tiene:

  $$\lambda(3 \cdot 6 - 7 + 1) + 6 + 3 \cdot 7 + 3 = 0, \text{ de donde } \lambda = \frac{-5}{2}$$

  Luego la ecuación de π resulta:

  $$\pi: \frac{-5}{2}(3x - y + z + 1) + x + 3y - z + 3 = 0$$
  $$\pi': -13x + 11y - 7z + 1 = 0$$

- Sea r la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$. Expresemos r como intersección de dos planos.

  $$r: \begin{cases} y = 2 + 2\left(\dfrac{-x}{3}\right) \\ z = 1 + \dfrac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow r': \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ -x + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

  En consecuencia, la ecuación del haz de planos determinado por r es de la forma:

  $$\lambda(2x + 3y - 6) - x + 3z - 3 = 0, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicios:

1. Sea r la recta dada por $r: \begin{cases} 4x - y + z - 8 = 0 \\ x + y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$

   Determinar la ecuación del plano del haz de planos de arista r que pasa por el punto $(-3, 2, -1)$.

2. Sean π y π' los planos de ecuaciones

   $$\pi: 4x - 3y + 7z + 8 = 0 \quad \text{y} \quad \pi': -x - y + 3z - 6 = 0$$

   Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de π y π' y la ecuación del haz de planos de arista r.

3. Sea r la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -5 - t \\ z = 6 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Determinar la ecuación del haz de planos de arista r.

4. ¿Pertenece el plano $x + y + z + 2 = 0$ al haz de planos determinado por la recta

$$\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0? \end{cases}$$

Justificar la respuesta.

3 POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO

3.1. Sean r una recta y π un plano en el espacio. Se dice que r es *paralela* a π si r está contenida en π o r y π no tienen puntos comunes.

Si r es paralela a π, se escribe $r \parallel \pi$; entonces $r \parallel \pi$ si y solamente si $r \subset \pi$ o $r \cap \pi = \varnothing$.

3.2. Supongamos que la recta r viene expresada como intersección de dos planos

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

y que la ecuación del plano π es $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$.

Consideremos las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

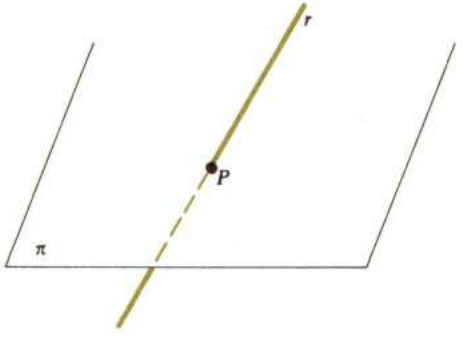
Dado que las dos primeras filas representan dos planos que se intersecan en la recta r, se ha visto en **1** que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$. Entonces se pueden presentar los siguientes casos al estudiar el sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$\operatorname{rg}(M) = 3, \ \operatorname{rg}(M') = 3$$

En este caso el sistema es compatible determinado; por tanto, existe un único triple de números reales (x,y,z) que verifica las tres ecuaciones; esto significa que la recta y el plano se intersecan en un punto (Fig. 9).



(Fig. 9)

Ejemplo:

- Sea r la recta de ecuación $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

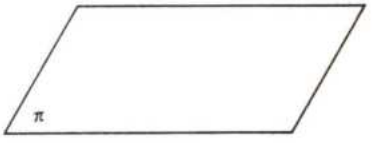
y el plano π de ecuación $x - y + 3z = 5$.

Entonces $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$ y $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 3$

luego la recta y el plano se intersecan en un punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema, y resulta $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 2\right)$.

Caso 2

$\operatorname{rg}(M) = 2$ y $\operatorname{rg}(M') = 3$. En este caso el sistema es incompatible, y la recta y el plano no tienen punto en común, $\pi \cap r = \varnothing$, y π y r son paralelos (Fig. 10).



(Fig. 10)

Caso 3

$$\operatorname{rg}(M) = 2 \quad \text{y} \quad \operatorname{rg}(M') = 2$$

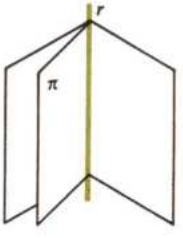
Como $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$, entonces el vector (A'', B'', C'', D'') debe ser combinación lineal de los (A,B,C,D) y (A',B',C',D'); por tanto, deben existir números reales, no ambos nulos, λ y μ tales que

$$(A'',B'',C'',D'') = \lambda\,(A,B,C,D) + \mu\,(A',B',C',D')$$

Por tanto:

$$A''x + B''y + C''z + D'' = \lambda\,(Ax + By + Cz + D) + \mu\,(A'x + B'y + C'z + D').$$

Esto quiere decir que el plano π pertenece al haz de planos de arista r, y por lo tanto, el plano π contiene a la recta r (Fig. 11).



(Fig. 11)

Ejemplo:

- Sea r la recta intersección de los planos $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $4x+y-z=3$;

entonces: $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ y $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$, luego r y π son paralelos.

3.3. Sean r la recta con determinación lineal $r\ (Q,\vec{w})$ y π el plano con determinación lineal $(P,\vec{u},\vec{v})$; entonces, $r \parallel \pi$ si y sólo si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} = 2$.

Supongamos $\text{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} = 2$; como $\text{rg}\{\vec{u},\vec{v}\} = 2$, ya que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, $\vec{w}$ debe ser combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ $(a, b \in \mathbb{R}$, no ambos nulos).

Si $r \subset \pi$, entonces ya $r \parallel \pi$; supongamos que r no está contenida en π; si r y π no fuesen paralelos, existiría un punto $X \in r \cap \pi$.

Sea $Y \in r$; entonces de la relación $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{QY}$ se deduce:

$$\overrightarrow{PY} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} - s\vec{w} + t\vec{w}, \text{ con } \lambda, \mu, s, t \in \mathbb{R}$$
$$\overrightarrow{PY} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} - s(a\vec{u} + b\vec{v} + t(a\vec{u} + b\vec{v}))$$

Entonces $\overrightarrow{PY} = (\lambda - sa + ta)\vec{u} + (\mu - sb + tb)\vec{v}$, luego $Y \in \pi$ y por tanto $r \subset \pi$, contradicción con nuestra suposición.
Luego r y π no pueden tener puntos comunes: $\pi \cap r = \varnothing$, y por tanto $r \parallel \pi$.

La demostración del recíproco la dejamos como ejercicio.

3.4. Resumiendo lo anterior se tiene:

r es paralela a π si y sólo si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} = 2$.
r y π se intersecan si y sólo si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} = 3$.

3.5. Si $r \parallel \pi$, entonces para ver si $r \subset \pi$ se puede proceder de dos formas:

Eligiendo un punto de r y viendo si pertenece al plano; en caso afirmativo, la recta estará contenida en el plano.
Viendo si las ecuaciones paramétricas de la recta verifican idénticamente la ecuación del plano.

Ejemplo:

- Sea π el plano de ecuaciones $\begin{cases} x = 5 - 3t + 2s \\ y = 7 + 2t + 5s \\ z = 8 + t + 3s \end{cases}$

y r la recta r: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z-3}{17}$

Una determinación de r es $(P, \vec{u}, \vec{v})$, donde $P(5, 7, 8)$, $\vec{u}(-3, 2, 1)$, $\vec{v}(2, -1, 3)$, y una determinación de r es $(Q, \vec{w})$, donde $Q(-1, -5, 3)$ y $\vec{w}(4, -1, 17)$.

Como $\text{rg}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 17 \end{pmatrix} = 2$, el plano π y la recta son paralelos.

Para ver si $r \subset \pi$ o $r \cap \pi = \varnothing$, elegimos $Q(-1, -5, 3) \in r$, y veamos si pertenece al plano.

Como el sistema

$$\begin{cases} -1 = 5 - 3t + 2s \\ -5 = 7 + 2t - s \\ 3 = 8 + t + 3s \end{cases}$$

es incompatible, el punto Q no pertenece al plano, y por tanto $\pi \cap r = \varnothing$.

3.6. Sea r una recta dada por sus ecuaciones paramétricas con su vector de dirección $\vec{w} = (w_1,w_2,w_3)$ y sea π el plano cuya ecuación general es $Ax + By + Cz + D = 0$.

Supongamos que la recta r sea paralela al plano π, y sean P_1 y P_2 dos puntos de π tales que el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ sea un representante del vector $\vec{w}$.

Si $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$, se tiene entonces que $(w_1,w_2,w_3) = (x_2-x_1, y_2-y_1,z_2-z_1)$. Por otra parte, al ser P_1 y P_2 puntos de π, se sigue que:

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \quad \text{y} \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

de donde restando estas dos igualdades miembro a miembro resulta:

$$A(x_2-x_1) + B(y_2-y_1) + C(z_2-z_1) = 0$$

En consecuencia,

$$\boxed{Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 = 0}$$

relación que expresa la relación de paralelismo entre la recta r y el plano π.

Ejemplo:

- Sean r y r' las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{2}; \qquad r': \frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{5}$$

y el plano π de ecuación $x + 2y + 4z - 13 = 0$

r es paralela a π, ya que $2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 0$

r' no es paralela a π, ya que $6 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 22 \neq 0$

Ejercicios:

1. Sean r la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-3}{2}$ y el plano π: $4x + my + z - 2 = 0$. Determinar el valor de m para el cual la recta r es paralela a π.

2. Sea r la recta de ecuación $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{z-3}{-1}$

   Determinar:

   a) La ecuación de un plano que corte a la recta r.

   b) La ecuación de un plano que sea paralelo a r.

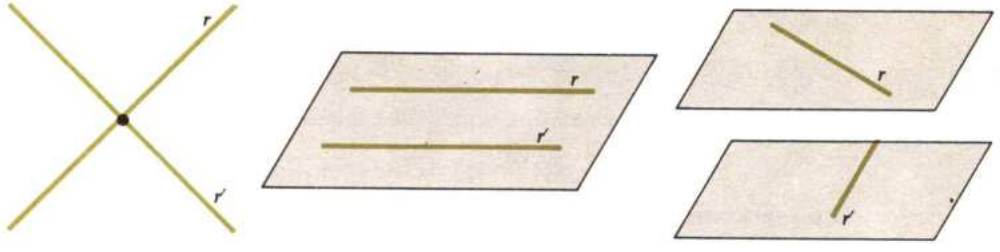
   c) La ecuación de un plano que contenga a r.

3. Averiguar si la recta r: $\begin{cases} y = 3x - 6 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$ es paralela al plano ABC, siendo $A(-1, 2, 5)$, $B(2, 3, 5)$, $C(7, 6, 2)$. En caso negativo, determinar el punto de intersección de r y el plano ABC.

---

4 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

4.1. Sean r y r' dos rectas en el espacio; estas rectas pueden adoptar las siguientes posiciones relativas (Fig. 12):



(Fig. 12)

Cortarse si tienen un único punto común.

Ser paralelas si son iguales o bien no tienen puntos comunes y están situadas en un mismo plano. Si son iguales se suele decir que son coincidentes.

Cruzarse si no tienen puntos comunes y no existe ningún plano que contenga a ambas.

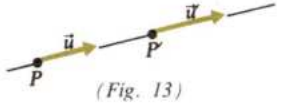
Si r y r' son paralelas, se escribe, como es usual, $r \parallel r'$.

Debe observarse que dos rectas en el espacio pueden no tener ningún punto común y, sin embargo, no ser paralelas (rectas que se cruzan).

4.2. Supongamos las rectas r y r' de determinaciones lineales respectivas $(P,\vec{u})$ y $(P',\vec{u}')$. Se tienen los siguientes casos:

Caso 1. Rectas coincidentes

Se ha visto en el tema anterior que $r = r'$ si y sólo si $\overrightarrow{PP'} = t\vec{u}$ y $\vec{u}' = s\vec{u}$ $(t, s \in \mathbb{R})$; esto equivale a que $\operatorname{rg}(\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{PP'}) = 1$ (Fig. 13).



(Fig. 13)

Ejemplo:

- Sean

$$r:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad r':\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Entonces $P(1, -1, 0)$, $P'(3, 2, 1)$, $\vec{u}(2, 3, 1)$, $\vec{u}'(4, 6, 2)$ se tiene $\overrightarrow{PP'} = (3 - 1, 2 - (-1), 1 - 0) = (2, 3, 1)$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

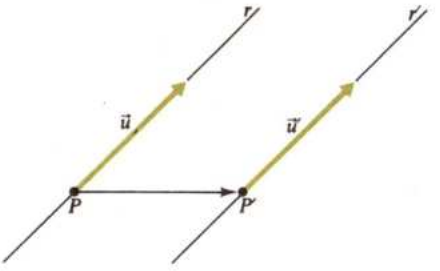
luego $r = r'$.

Caso 2. Rectas paralelas (no coincidentes)

r es paralela y distinta de r' si y sólo si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}'\} = 1$ y $\text{rg}\{\vec{u},PP'\} = 2$ (Fig. 14).

Supongamos $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}'\} = 1$ y $\text{rg}\{\vec{u},\overrightarrow{PP'}\} = 2$; entonces el plano π de determinación lineal $(P,\vec{u},\overrightarrow{PP'})$ contiene a r y r'.

En efecto, si $X \in r$, entonces $PX = \lambda\vec{u}$ $(\lambda \in H)$ y $PX = \lambda\vec{u} + 0 \cdot PP'$, luego $X \in \pi$ y $r \in \pi$.



(Fig. 14)

Si $X \in r'$, entonces $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X} = 1 \cdot \overrightarrow{PP'} + \mu\vec{u}'$ (ya que $\overrightarrow{P'X} = t\vec{u}' = ts\vec{u}$, pues $\vec{u}$ y $\vec{u}'$ son linealmente dependientes y no nulos) se sigue entonces que $X \in \pi$ y $r' \in \pi$.

Veamos finalmente que r y r' no tienen ningún punto común. Supongamos $Q \in r \cap r'$; si $Y \in r'$, $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'Y} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} + \nu\vec{u}$, luego $Y \in r$ y $r' \in r$, luego $r' = r$, pero entonces $\overrightarrow{PP'}$ sería proporcional a $\vec{u}$, contradicción con que $\text{rg}\{\vec{u},\overrightarrow{PP'}\} = 2$. El recíproco lo dejamos como ejercicio.

Ejemplos:

- Sean las rectas r y r' de ecuaciones

$$r:\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 \\ z = 3 - 6t \end{cases} \qquad r':\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 6 \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

Entonces $P(-2, 4, 3)$, $P'(5, 6, 7)$, $\vec{u}(2, 0, -6)$, $\vec{u}'(-1, 0, 3)$, de aquí que $\overrightarrow{PP'}(7, 2, 4)$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1; \quad \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

luego r es paralela a r' y no coincidente.

- Sean r y r' las rectas paralelas de ecuaciones

$$r: \frac{x-a}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

$$r': \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

Vamos a determinar el valor de a para el cual las rectas r y r' tienen una intersección vacía, es decir, son no coincidentes.

Si r y r' son no coincidentes

$$\text{rg}\begin{pmatrix} a-1 & 2-2 & 3-3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, si $a \neq 1$, las rectas r y r' son no coincidentes, ya que en este caso

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Sean las rectas paralelas r y r' de ecuaciones

$$r: (x, y, z) = (a, b, 6) + t(-1, 2, 3)$$
$$r': (x, y, z) = (2, 4, 5) + s(-1, 2, 3)$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Vamos a determinar los valores de a y b para los cuales las rectas r y r' son coincidentes:

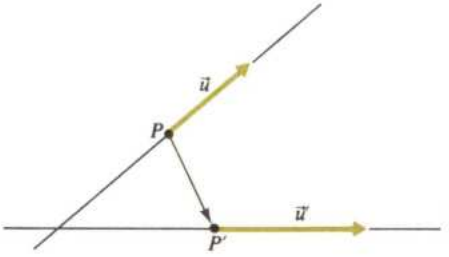
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a-2 & b-4 & 6-5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-2 & b-4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $a = \dfrac{5}{3}$ y $b = \dfrac{14}{3}$

Caso 3. *Rectas que se cortan*

Las rectas r y r' se cortan en un punto si y sólo si $\operatorname{rg}\{\vec{u}, \vec{u}'\} = 2$ y $\operatorname{rg}\{\vec{u}, \vec{u}', PP'\} = 2$ (Fig. 15).

La demostración, que se deja como ejercicio (ejercicio 1 de este apartado), se reduce a considerar que $\vec{u}$, $\vec{u}'$ y PP' son coplanarios.



(Fig. 15)

Ejemplos:

- Sean r y r' las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2}$$
$$r': \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{3}$$

Determinemos el valor de a para el cual las rectas r y r' son.secantes.

$$r \text{ y } r' \text{ secantes} \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a-2 & 1 & 2+1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Por ser $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, r y r' secantes $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, de donde $a = \dfrac{13}{6}$.

- Sean r y r' dos rectas que se cortan. Entonces se tiene que $\operatorname{rg}\{\vec{u}, \vec{u}', PP'\} = \operatorname{rg}\{\vec{u}, \vec{u}'\} = 2$.

Para determinar el punto de corte de r y r' se resuelve el sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, s y t.

- Demostremos que las rectas r y r' de ecuaciones

$r: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(-1, 4, 5)$
$r': (x, y, z) = (2, 1, -2) + s(2, 3, -2)$
con $t, s \in \mathbb{R}$ son secantes y determinemos su punto de corte.

r y r' son secantes, ya que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2+1 & 1-2 & -2-5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$

por ser $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Entonces, para determinar el punto común de r y r' resolvemos el sistema

$$\begin{cases} -t - 1 = 2s + 2 \\ 4t + 2 = 3s + 1 \\ 5t + 5 = -2s - 2 \end{cases}$$

El sistema tiene por solución $t = -1$ y $s = -1$.

Sustituyendo el valor de t en la ecuación de r resulta el punto P de coordenadas $(x, y, z) = (-1, 2, 5) - (-1, 4, 5) = (0, -2, 0)$. Análogamente, las coordenadas de P también se obtienen sustituyendo el valor de s en la ecuación de r': $(x, y, z) = (2, 1, -2) - (2, 3, -2) = (0, -2, 0)$.

Caso 4. Rectas que se cruzan

Las rectas r y r' se cruzan si y sólo si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{PP'}\} = 3$.

En efecto:

Si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{PP'}\} = 1$, las rectas serían paralelas y coincidentes.

Si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{PP'}\} = 2$ y $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}'\} = 1$, r y r' serían paralelas no coincidentes.

Si $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{PP'}\} = 2$ y $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}'\} = 2$, r y r' se cortarían; por tanto, $\text{rg}\{\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{PP'}\} = 3$ si r y r' se cruzan.

El recíproco se demuestra de forma análoga.

Ejemplos:

- Sea r: $(x, y, z) = (-2, 1, 5) + t(2, 7, 6)$ y r': $(x, y, z) = (0, -1, 0) + s(-1, 5, 6)$ con $t,s \in \mathbb{R}$.

  Entonces $\text{rg}\begin{pmatrix} -2-0 & 1+1 & 5-0 \\ 2 & 7 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 3$

  ya que $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$. En consecuencia, las rectas r y r' se cruzan.

- Sean r: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{7}$ y r': $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{4}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 3$ y r y r' son rectas que se cruzan.

- Sean r: $\begin{cases} y = 4x + 8 \\ z = -6x + 9 \end{cases}$ y r': $\begin{cases} x = -7 + 6 \\ y = 4z - 2 \end{cases}$

  Entonces las ecuaciones paramétricas de r y r' resultan:

  $$r: (x, y, z) = (t, 4t + 8, -6t + 9) = (0, 8, 9) + t(1, 4, -6)$$
  $$r': (x, y, z) = (-7s + 6, 4s - 2, s) = (6, -2, 0) + s(-7, 4, 1)$$

  con t, $s \in \mathbb{R}$.

  Por ser $\text{rg}\begin{pmatrix} 0-6 & 8+2 & 9-0 \\ 1 & 4 & -6 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -6 & 10 & 9 \\ 1 & 4 & -6 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3$

  las rectas r y r' son rectas que se cruzan.

Ejercicios:

1. Sea r: $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z+4}{-6}$. Determinar la recta r' paralela a r y que contiene al punto $(-1, 2, 6)$.

2. Sean los puntos $A(4, -6, 2)$, $B(-3, 2, 5)$, $C(8, -1, 6)$ y $D(15, -9, 3)$. Demostrar que las rectas AB y CD son paralelas. Determinar si son o no coincidentes.

3. Sea r: $\begin{cases} x = 3y - 2 \\ z = 8y + 4. \end{cases}$
Calcular la ecuación de la recta r' paralela a r y que contiene al punto $(5, -2, -3)$.

4. Sean las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -2y + 3 \\ z = 3y + 1 \end{cases} \qquad r': \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

Demostrar que r y r' son paralelas y coincidentes.

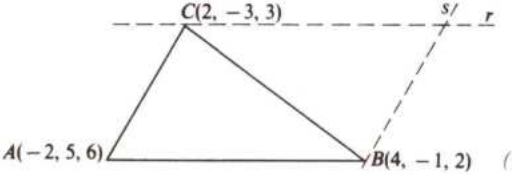
5. Sean las rectas:

$$r: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -3x + 6 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} y = -2x - 2 \\ z = -3x - 8 \end{cases}$$

Demostrar que r y r' son paralelas y no coincidentes.

6. Se considera el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura 16.

Determinar las ecuaciones de las rectas AC, AB, r y s.



(Fig. 16)

7. Sea r la recta que pasa por el punto $A(-1, 2, 3)$ y tiene por vector de dirección al vector $\vec{v}(4, 5, 6)$ y sea r' la recta que pasa por el punto $B(4, 0, 3)$ y tiene al vector $\vec{v}'(-5, 0, 2)$ como vector de dirección. Determinar las ecuaciones de r y r' y averiguar si son secantes o si se cruzan.

8. Sean r y r' las rectas de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \quad \text{y} \quad r': \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$$

Demostrar que r y r' son secantes y determinar su punto de intersección.

9. Demostrar que las rectas r y r' cuyas ecuaciones son

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = \quad t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{y} \quad r': \begin{cases} x = 3 \\ y = \quad s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$ son rectas que se cruzan.

EJERCICIOS FINALES

1. Sea $A(-4, 3, -5)$, $B(2, -3, 1)$, $C(2, 7, 6)$. Determinar la ecuación implícita del plano ABC. Escribir la ecuación del plano π que contiene al punto $(11, -7, 10)$ y que es paralelo al plano ABC.

2. Sean los planos

$$\begin{aligned} \alpha&: mx + y + z - 1 = 0 \\ \beta&: x + my + z - 1 = 0 \\ \gamma&: x + y + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Estudiar la posición relativa de α, β y γ de acuerdo con los valores del parámetro m.

3. Sean π: $3x - y + 4z = 0$ y π': $5x - 4y + 3z + 2 = 0$. Se pide:
   a) Ecuación del plano α paralelo al π y que pasa por el punto $(-1, 2, 3)$.
   b) Ecuación de la recta r determinada por π y π'.
   c) Ecuación del plano perteneciente al haz de arista r y que pasa por el punto $(-7, 3, 2)$.

4. Sea r la recta de ecuación r: $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+5}{-6} = \dfrac{z+3}{9}$.

Determinar la ecuación del haz de planos de arista r y la ecuación del plano perteneciente a dicho haz que contiene al punto $(0, 0, -1)$.

5. Se considera la recta r: $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(-1, 5, 6)$ con $t \in \mathbb{R}$. Determinar la ecuación de la recta r' paralela a r y que pasa por el punto $(2, 6, 2)$. Averiguar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta r: $A(4, -1, 2)$, $B(1, -8, 9)$, $C(2, -7, 0)$, $D(-4, 17, 21)$.

6. Sean las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \quad \text{y} \quad r': \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Determinar el valor de b para que las rectas r y r' sean secantes.

7. Se consideran los puntos $A(-2, 3, 1)$, $B(4, 1, 5)$, $C(0, -1, 0)$ y $D(-3, -7, 4)$. Determinar las ecuaciones de las rectas AB, BC, CD y AD. Determinar la intersección de las rectas AB y CD.

8. Demostrar que las rectas dadas por r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$ y r': $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ tienen intersección vacía.

9. Sean $A(-3, 2, 5)$, $B(7, 9, -1)$ y $C(2, -2, 5)$. Determinar:
   a) La ecuación del haz de planos determinado por la recta AB.
   b) La ecuación del haz de planos determinado por la recta AC.
   c) El plano que contiene a la recta AB y al punto $(4, 1, -6)$.

10. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 1, -1)$ y es secante a las rectas

$$r: \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z - \frac{1}{3}}{1} \quad \text{y} \quad r': \frac{x-1}{2} = y - 2 = z$$

TEMA 8 EL ESPACIO EUCLÍDEO

En este tema se estudia el producto escalar, que nos permitirá abordar ciertos problemas métricos que implican medición de longitudes, áreas y volúmenes. Algunos de estos problemas se resuelven más cómodamente utilizando el producto vectorial y el producto mixto, que también se estudian en este tema.

El estudio del producto escalar se hace partiendo de la definición clásica, que coincide con la que aparece en los libros de Física, para llegar después a la expresión analítica en bases ortonormales. En cambio, para el producto vectorial hemos invertido el proceso partiendo de la definición mediante coordenadas, para al final dar la interpretación geométrica. Este modo de proceder permitirá al lector comprobar la reversibilidad de los procesos matemáticos.

1 PRODUCTO ESCALAR EN EL ESPACIO VECTORIAL V^3. PROPIEDADES

1.1. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres del espacio vectorial tridimensional $\mathbf{V}^3$. *Se llama producto escalar $\vec{a}$ por $\vec{b}$, y se designa por $\vec{a} \cdot \vec{b}$, al número real que es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman el vector $\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$ si ambos son no nulos, o igual a cero si uno de ellos es el vector nulo. Es decir:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}), & \text{si } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{si } \vec{a} = \vec{0} \text{ o } \vec{b} = \vec{0} \end{cases} \qquad [1]$$

1.2. Para todo vector libre $\vec{a}$ convendremos en designar por $(\vec{a})^2$ el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{a}$. A este producto se le llama *norma* del vector $\vec{a}$. Según esto, si $\vec{a} \neq \vec{0}$, se tiene: $(\vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2$. Por consiguiente, se tiene para el módulo del vector

$$|a|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$$

La fórmula es trivialmente válida si $\vec{a} = 0$.

Nota. Es conveniente advertir que algunos textos utilizan el término norma para indicar $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

1.3. Probaremos las siguientes propiedades del producto escalar para aquellos casos en que los vectores que intervienen son no nulos.

Conmutativa

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}^3$.

En efecto: si $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}|\ |\vec{a}| \cos(\vec{b},\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$, ya que los ángulos opuestos $(\vec{a},\vec{b})$ y $(\vec{b}, \vec{a})$ tienen el mismo coseno.

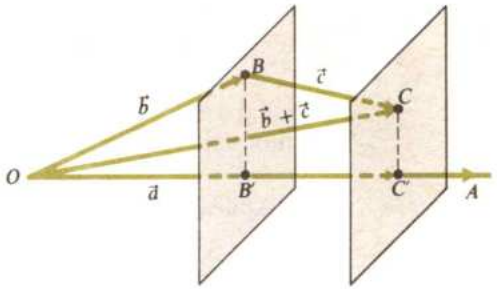
1.4. *Distributiva respecto de la suma de vectores*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{BC}$ representantes de los vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, respectivamente.

Un representante de $\vec{b} + \vec{c}$ será OC.

Trazando por B y C planos perpendiculares a $\overrightarrow{OA}$ y llamando B' y C' a las intersecciones de estos planos con $\overrightarrow{OA}$ se verifica (figura 1):



(Fig. 1)

$$[\overrightarrow{OC'}] = [\overrightarrow{OB'}] + [\overrightarrow{B'C'}]$$

$$|\vec{b} + \vec{c}| \cos(\vec{a},\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{c}| \cos(\vec{a},\vec{c})$$

Multiplicando la relación anterior por $|\vec{a}|$ resulta:

$$\underbrace{|\vec{a}|\ |\vec{b} + \vec{c}| \cos(\vec{a},\vec{b} + \vec{c})}_{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})} = \underbrace{|\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b})}_{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \underbrace{|\vec{a}|\ |\vec{c}| \cos(\vec{a},\vec{c})}_{\vec{a} \cdot \vec{c}}$$

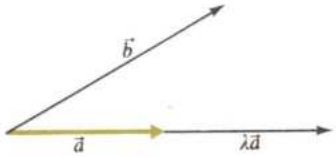
1.5. Para todo número real λ se verifica $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$. En efecto:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\lambda\vec{a},\vec{b}) = |\lambda|\ |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\lambda\vec{a},\vec{b}) \quad [2]$$

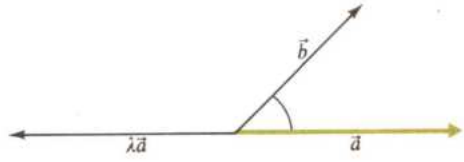
Si $\lambda > 0$, entonces $\vec{a}$ y $\lambda\vec{a}$ tienen el mismo sentido, y por ello los ángulos $(\lambda\vec{a},\vec{b})$ y $(\vec{a},\vec{b})$ son iguales (Fig. 2).

Además, $|\lambda| = \lambda$, y en consecuencia de [2] resulta:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda|\ |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda|\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$



(Fig. 2)



(Fig. 3)

Si $\lambda < 0$, entonces $\vec{a}$ y $\lambda\vec{a}$ tienen distinto sentido (Fig. 3), y por ello los ángulos $(\lambda\vec{a},\vec{b})$ y $(\vec{a},\vec{b})$ son suplementarios y por consiguiente $\cos(\lambda\vec{a},\vec{b}) = -\cos(\vec{a},\vec{b})$. Además, en este caso $|\lambda| = -\lambda$. Sustituyendo en la expresión [2] resulta:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda|\ |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\lambda\vec{a},\vec{b}) = -\lambda\ |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ [-\cos(\vec{a},\vec{b})] = \lambda\ |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Si $\lambda = 0$, la propiedad que nos ocupa es evidente.

1.6. *La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares es que su producto escalar sea cero.*

En efecto, si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores perpendiculares, $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$, y por consiguiente, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Recíprocamente, si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, se verificará $|\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$, y como $|\vec{a}| \neq 0$ y $|\vec{b}| \neq 0$, se tendrá: $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$, de donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

1.7. Para todo vector $\vec{a}$, se verifica: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, y la igualdad se verifica si y sólo si $\vec{a} = 0$. Como para todo vector $\vec{a}$, es $|a| \geq 0$, la proposición resulta trivial.

1.8. Aplicando las propiedades anteriores se pueden probar las siguientes igualdades:

a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$

b) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$

c) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2$

Ejercicios:

1. Probar las igualdades *a*, *b* y *c* de **1.8**.

2. Calcular $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en los siguientes casos:

   a) $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 4; \cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3}{4}$.

   b) $|\vec{a}| = 0$.

   c) $(\vec{a})^2 = 16; (\vec{b})^2 = 9; \cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}$.

   d) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1; (\vec{a},\vec{b}) = 90°$

3. Demostrar que para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de $\mathbf{V}^3$ se verifica que $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$. Calcular $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

4. Probar que si $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, entonces $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

5. Probar que el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es igual al producto del módulo de $\vec{a}$ por la proyección del vector $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

---

2 EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR

2.1. Un vector $\vec{u}$ se dice que es *unitario* si su módulo es la unidad.

$$\vec{u} \text{ vector unitario} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$$

Si $\vec{v}$ es un vector cualquiera no nulo, el vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ es unitario, ya que

$$|\vec{u}| = \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \sqrt{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} = \sqrt{\frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2}} = \sqrt{1} = 1$$

2.2. Una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ del espacio vectorial $\mathbf{V}^3$ se dice *ortonormal o métrica* si se verifican las siguientes condiciones:

a) *Los vectores de la base son perpendiculares dos a dos.*

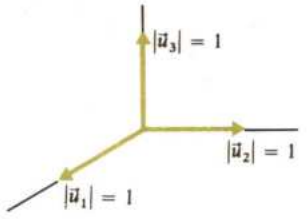
b) *Los vectores de la base son unitarios.*

Podemos expresar estas condiciones de un modo equivalente:

a') $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$

b') $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 1$ (Fig. 4)

Es decir, $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$



(Fig. 4)

2.3. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^3$ y sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}^3$. Por ser B un sistema de generadores de $\mathbf{V}^3$ podemos escribir:

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$
$$\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$$

Calculemos $\vec{a} \cdot \vec{b}$ aplicando las propiedades del producto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3)\cdot(b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3) =$$
$$= a_1b_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + a_2b_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) + a_3b_3(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3) + (a_1b_2 + a_2b_1)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) +$$
$$+ (a_1b_3 + a_3b_1)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) + (a_2b_3 + a_3b_2)(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3)$$

Recordando que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ resulta la siguiente expresión analítica del producto escalar:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

2.4. La expresión analítica del módulo de un vector $\vec{a}$ en una base ortonormal se obtiene fácilmente de la relación $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3) \cdot (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

de donde $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

El módulo tiene las siguientes propiedades:

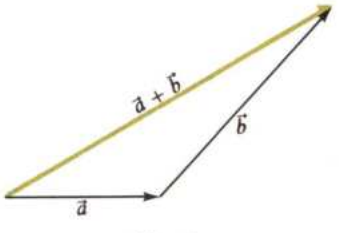
I) $|\vec{a}| = 0$ si y sólo si $\vec{a} = \vec{0}$.

II) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

III) $|\lambda a| = |\lambda|\,|\vec{a}|$, donde $|\lambda|$ es el valor absoluto del número real λ.

La propiedad I) es consecuencia de la **1.7** y la III) de la definición de producto de un escalar por un vector.

La propiedad II) expresa (figura 5) que un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos. La igualdad en II) se da cuando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos y del mismo sentido.



(Fig. 5)

2.5. Expresemos analíticamente la condición de perpendicularidad de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ referidos a una base ortonormal.

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; por consiguiente, la *condición necesaria y suficiente para que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares es que*

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0}$$

2.6. *Angulo de dos vectores.* De la definición de producto escalar resulta que el coseno del ángulo que forman dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyas coordenadas en una base ortonormal son (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) es:

$$\boxed{\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Ejemplo:

- El ángulo que forman los vectores $\vec{a}(-3, 2, 5)$ y $\vec{b}(-3, 3, -3)$ viene dado por:

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{(-3)\cdot(-3) + 2\cdot 3 + 5\cdot(-3)}{\sqrt{9 + 4 + 25}\cdot\sqrt{9 + 9 + 9}} = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$$

3 ESPACIO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL

3.1. El espacio vectorial $\mathbf{V}^3$ dotado del producto escalar que hemos definido recibe el nombre de *espacio vectorial euclídeo* o *espacio vectorial métrico*, y lo representamos por $(\mathbf{V}^3, +, \cdot)$ o también por $\mathbf{V}^3$.

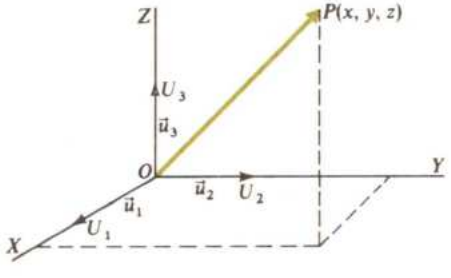
El espacio afín tridimensional $\mathscr{E}_3$ asociado al espacio vectorial euclídeo se llama *espacio euclídeo tridimensional.*

Un sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se dice un sistema de referencia *métrico u ortonormal* si la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es *ortonormal.*

De ahora en adelante trabajaremos con sistemas de referencia métricos.

Si $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonormal y U_1, U_2 y U_3 son puntos tales que $[\overrightarrow{OU_1}] = \vec{u}_1, [\overrightarrow{OU_2}] = \vec{u}_2, [\overrightarrow{OU_3}] = \vec{u}_3$, las rectas OU_1, OU_2, OU_3 reciben el nombre de *ejes de coordenadas cartesianas rectangulares* y se designan como ejes X, Y y Z, respectivamente (Fig. 6).

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base ortonormal $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se llaman coordenadas rectangulares del punto P.

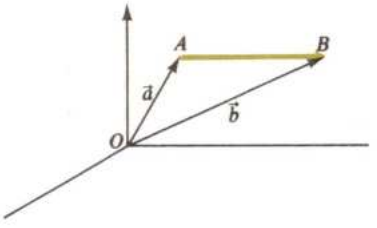


(Fig. 6)

En la figura 6, las coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base B son (x, y, z) y las coordenadas cartesianas del punto P son también (x, y, z).

3.2. Calculemos la distancia entre dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ respecto de un sistema de referencia métrico u ortonormal.

La distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector $\{\overrightarrow{AB}\} = \vec{b} - \vec{a}$ (Fig. 7).



(Fig. 7)

Como las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$ resulta que la distancia de A a B es:

$$d(A,B) = |[\overrightarrow{AB}]| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

Se verifican las siguientes propiedades de la distancia:

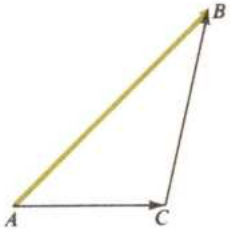
a) Para todo par de puntos (A,B) de $\mathscr{E}_3$ se verifica $d(A,B) \geq 0$.

b) Para todo par de puntos de $\mathscr{E}_3$ se verifica $d(A,B) = d(B,A)$.

c) Para tres puntos cualesquiera A, B y C de $\mathscr{E}_3$ se verifica:

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

Probemos las propiedades *b*) y *c*) (la propiedad *a*) queda como ejercicio):



(Fig. 8)

b) $d(A,B) = |[\overrightarrow{AB}]| = |\vec{b}-\vec{a}| = |-1(\vec{a}-\vec{b})| =$

$= |-1|\,|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| = |[\overrightarrow{BA}]| = d(B,A)$

c) $d(A,B) = |[\overrightarrow{AB}]| = |[\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CB}]| \leq |[\overrightarrow{AC}]| +$

$+ |[\overrightarrow{CB}]| = d(A,C) + d(C,B)$ (Fig. 8).

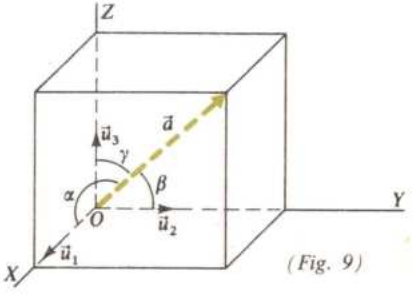
4 COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Sea $\mathscr{R} = \{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia métrico y $\vec{a}$ un vector no nulo de $\mathbf{V}^3$.

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$

Multiplicando escalarmente los vectores de la base $B = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ por el vector $\vec{a}$ se tiene (Fig. 9):

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_1 = a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha$$
$$\vec{a}\cdot\vec{u}_2 = a_2 = |\vec{a}|\cos\beta$$
$$\vec{a}\cdot\vec{u}_3 = a_3 = |\vec{a}|\cos\gamma$$



(Fig. 9)

Los cosenos de los ángulos α, β y γ que forma el vector $\vec{a}$ con los ejes se llaman *cosenos directores de* $\vec{a}$ (Fig. 9).

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

Por tanto $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Esto nos dice que *los cosenos directores de un vector $\vec{a}$ son las coordenadas de un vector unitario del mismo sentido que $\vec{a}$.* Como $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ es un vector unitario, la suma de los cuadrados de sus coordenadas es 1: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, lo que nos dice que los cosenos directores de un vector no son arbitrarios.

Ejemplos:

- Hallar el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ siendo $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3; \vec{b} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal.

  Aplicando la fórmula obtenida en **2.3** se tiene:

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 6 - 6 - 1 = -1$$

- Hallar el módulo del vector $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ en una base ortonormal

  $$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

- Hallar dos vectores unitarios paralelos al vector $\vec{v} = (5, -2, 1)$.

  El módulo de $\vec{v}$ es $|\vec{v}| = \sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30}$.

  Por tanto, un vector unitario paralelo a $\vec{v}$ es:

  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$. Este vector tiene el mismo sentido que $\vec{v}$.

  El otro vector unitario buscado es el opuesto de $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$:

  $$\frac{-\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}\right)$$

- Los vectores $\vec{u} = (-4, -6, 2)$ y $(2, 5, 19)$ son perpendiculares, ya que $-4 \cdot 2 - 6 \cdot 5 + 2 \cdot 19 = -8 - 30 + 38 = 0$.

- Hallar la distancia entre los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 3, 5)$.

  $$d(A, B) = |[\overrightarrow{AB}]| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

- Los cosenos directores del vector $\vec{a} = 6\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ son:

  $$|\vec{a}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

  $$\cos\alpha = \frac{6}{7}; \quad \cos\beta = \frac{3}{7}; \quad \cos\gamma = \frac{-2}{7}$$

- Calcular m para que los vectores $\vec{a} = (-2, m, 2)$ y $\vec{b} = (1, 2, m)$ sean perpendiculares.

  Imponiendo la condición que el producto escalar es 0, resulta $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0; -2 + 2 \cdot m + 2m = 0$, de donde $m = 1/2$.

5 PRODUCTO VECTORIAL

Estudiaremos a continuación una operación interna en el espacio vectorial tridimensional $\mathbf{V}^3$ llamada *producto vectorial*, que es útil por su aplicación en la Física y en las Matemáticas; en particular la utilizaremos en este curso para la resolución de ciertos problemas métricos.

Introduciremos el producto vectorial por el método analítico para obtener después la definición geométrica clásica.

5.1. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de $\mathbf{V}^3$, referidos a una base ortonormal $B = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$
$$\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$$

Se llama *producto vectorial* de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y se escribe $\vec{a} \wedge \vec{b}$, al vector:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3$$

Esta definición se puede recordar bien utilizando el determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

pues desarrollando por los adjuntos de los elementos de la primera fila se obtiene $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Nota. Aunque el determinante anterior no tiene sentido por ser sus elementos números reales y vectores, es perfectamente lícito escribir

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3$$

si se conviene en que el determinante es solamente una notación para representar el segundo miembro.

Ejemplo:

- El producto vectorial $\vec{a} \wedge \vec{b}$ donde $\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{b} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \end{cases}$ es

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3$$

- Si $\vec{a} = (2, -1, 3)$ y $\vec{b} = (1, 0, 1)$ en base ortonormal se tiene:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, 1, 1).$$

6 PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

6.1. *Anticonmutativa*: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

En efecto:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 =$$

$$= -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 - \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

6.2. *Distributiva*: $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

En efecto. Si respecto de la misma base ortonormal es $\vec{c} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$ se tiene:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3+c_3 & b_1+c_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) \vec{u}_1 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \right) \vec{u}_2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

6.3. $(\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b})$

Probemos la primera igualdad:

$$(\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} \lambda a_3 & \lambda a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = \lambda \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \lambda \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

6.4. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ y $\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$

Es decir, el vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$ y al vector $\vec{b}$.

Probemos la primera igualdad:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 \right) =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que el determinante tiene dos filas iguales.

Análogamente se prueba que $\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$.

6.5. *La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos es que su producto vectorial sea el vector cero.*

En efecto:

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$$

6.6. Se verifica $|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

En efecto, el primer miembro es

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 +$$
$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 -$$
$$- 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2$$

Desarrollando el segundo miembro resulta:

$$|\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$$
$$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 +$$
$$+ a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 -$$
$$- 2a_2b_2a_3b_3$$

lo que prueba que ambos desarrollos son iguales.

6.7. $|a \wedge b| = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a},\vec{b})$. Es decir, *el módulo de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es igual al producto del producto del módulo de $\vec{a}$ por el módulo de $\vec{b}$ por el seno del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$.*

En efecto, según la propiedad anterior:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 \cos^2(\vec{a},\vec{b}) =$$
$$= |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 \, [1 - \cos^2(\vec{a},\vec{b})] = |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 \operatorname{sen}^2(\vec{a},\vec{b})$$

Luego $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a},\vec{b})$.

Para interpretar geométricamente esta fórmula consideremos los representantes $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, respectivamente.

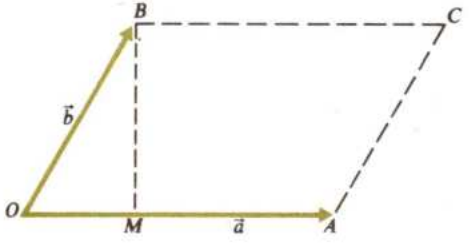
Sea BM el segmento de perpendicular trazada desde B a $\overrightarrow{OA}$ (Fig. 10).

Se tiene: $\overline{BM} = |\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a},\vec{b})$.

Entonces:

$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a},\vec{b}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BM}$ = área del paralelogramo $OACB$. Por tanto:

El módulo del producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es *igual al área del paralelogramo que determinan dos representantes, uno de $\vec{a}$ y otro de $\vec{b}$.*



(Fig. 10)

6.8. *Definición.*

Sean $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ y $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dos ternas de vectores linealmente independientes de $\mathbf{V}^3$. Se dice que ambas ternas determinan la *misma orientación* si signo det $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) =$ $=$ signo det $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

6.9. *La orientación de* $(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b})$ *es igual a la orientación de* $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *siendo* B *una base ortonormal de* $\mathbf{V}^3$.

En efecto: $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Si respecto de esta base las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3), respectivamente, las coordenadas de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ serán:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Por tanto:

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la última fila resulta:

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + $$
$$+ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0$$

6.10. De las propiedades **6.4, 6.7** y **6.9** se deduce la siguiente definición geométrica del producto vectorial.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tal que:

1) $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a},\vec{b})$.
2) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$; $\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$. Es decir, el vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. (En general perpendicular al plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.)
3) La orientación determinada por la terna $(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b})$ es igual a la orientación determinada por la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, es decir:

$$\text{signo det}(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b}) = \text{signo det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

Ejemplos:

- Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ y $\vec{b} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$.

Solución

Según la definición de producto vectorial:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = -2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$$

- Hallar un vector de longitud unidad perpendicular a los dos vectores $\vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal.

Solución

El vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Se puede calcular $\vec{a} \wedge \vec{b}$ como se indica a continuación:

$\vec{a} = (1, 1, 1); \vec{b} = (2, 3, -1)$

$$\begin{matrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ \boxed{2} & 3 & -1\end{matrix} \longrightarrow \text{1.ª coordenada de } \vec{a} \wedge \vec{b}; \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{matrix}1 & \boxed{1} & 1\\ 2 & \boxed{3} & -1\end{matrix} \longrightarrow \text{2.ª coordenada de } \vec{a} \wedge \vec{b}; \begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} \text{ o bien } -\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{matrix}1 & 1 & \boxed{1}\\ 2 & 3 & \boxed{-1}\end{matrix} \longrightarrow \text{3.ª coordenada de } \vec{a} \wedge \vec{b}; \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1$$

Luego $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-4, 3, 1)$.
Como queremos hallar un vector unitario, dividimos por el módulo:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$$

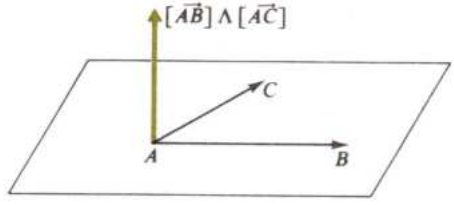
Hay dos vectores unitarios perpendiculares a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\left(\frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right) \text{ y } \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}\right)$$

- Encontrar un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 0, 1)$.

Solución

El vector $[\overrightarrow{AB}] \wedge [\overrightarrow{AC}]$ es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C (ver Figura 11).



(Fig. 11)

$$[\overrightarrow{AB}] = (2, 0, -1)$$
$$[\overrightarrow{AC}] = (3, -1, 0)$$

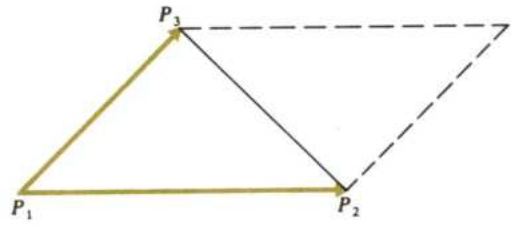
$$[\overrightarrow{AB}] \wedge [\overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1, -3, -2)$$

El opuesto del vector anterior y los proporcionales a ambos son también vectores perpendiculares al plano dado.

7 ÁREA DEL TRIÁNGULO

Consideremos el triángulo determinado por los puntos

$$P_1(x_1, y_1, z_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2) \text{ y } P_3(x_3, y_3, z_3) \text{ (Fig. 12).}$$



(Fig. 12)

Trazando por P_2 y P_3 paralelas a los lados P_1P_3 y P_1P_2, respectivamente, se obtiene un paralelogramo cuya área es doble de la del triángulo. Como el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los vectores $[\overrightarrow{P_1P_2}]$ y $[\overrightarrow{P_1P_3}]$, resulta:

$$\text{área } (P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{P_1P_2}] \wedge [\overrightarrow{P_1P_3}]|$$

Como las coordenadas de $[\overrightarrow{P_1P_2}]$ y $[\overrightarrow{P_1P_3}]$ son:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$[\overrightarrow{P_1P_3}] = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

las coordenadas de $[P_1P_2] \wedge [P_1P_3]$ serán:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}] \wedge [\overrightarrow{P_1P_3}] = \left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right)$$

Por consiguiente:

$$\text{área } (P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Ejemplo:

- Calculemos el área del triángulo de vértices

$$P_1(0, 1, 0),\ P_2(0, 1, 1) \text{ y } P_3(1, 2, 1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 0, 1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (1, 1, 1)$$

$$[\overrightarrow{P_1P_2}] \wedge [P_1P_3] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1, 1, 0)$$

$$\text{Area } (P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Nota. El área de un polígono se puede calcular descomponiéndolo en triángulos.

8 PRODUCTO MIXTO

8.1. Se llama *producto mixto de tres vectores* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbf{V}^3$ *y se representa por* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ *al producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos*, es decir:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Supongamos que la expresión de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortonormal es la siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 \\ \vec{b} &= b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3 \\ \vec{c} &= c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 \end{aligned}$$

Entonces se tiene la siguiente expresión analítica del producto mixto:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3) \cdot \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 \right] =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

De las propiedades de los determinantes se deducen las siguientes propiedades del producto mixto.

8.2. *Si uno de los vectores es nulo, el producto mixto es cero.*

Basta ver que una de las filas del determinante sería nula.

8.3. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = [\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$.

En efecto, al pasar del primer producto mixto a los dos siguientes hay dos cambios de signo en el determinante primero, y del primero se pasa a los tres últimos con un solo cambio de signo.

8.4. *Si* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$, *los vectores* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *y* $\vec{c}$ *son linealmente dependientes, y recíprocamente.*

En efecto:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\} \text{ son linealmente dependientes.}$$

8.5. Análogamente se prueban las siguientes propiedades:

a) $[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

b) $[\lambda\vec{a},\mu\vec{b},\gamma\vec{c}] = \lambda\mu\gamma[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

c) $[\vec{a}+\vec{a}',\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] + [\vec{a}',\vec{b},\vec{c}]$

d) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{b}',\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + [\vec{a},\vec{b}',\vec{c}]$

e) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{c}'] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] + [\vec{a},\vec{b},\vec{c}']$

8.6. *Interpretación geométrica del producto mixto.*

Vamos a *probar que el producto mixto* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ *es igual, en valor absoluto, al volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores* (Fig. 13).

Supongamos que $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{DC}$ (Fig. 13) son representantes de los vectores libres no coplanarios $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, respectivamente.

El volumen del paralelepípedo es igual al área de la base por la altura:

$$V = Sh$$

S = área del paralelogramo $DBMC$.

Ahora bien,

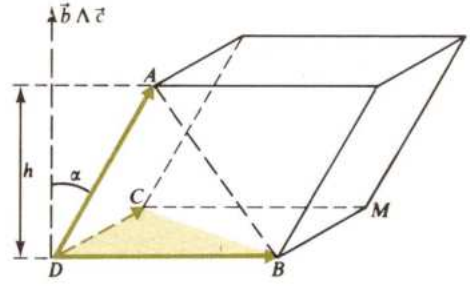
$$S = |[\overrightarrow{DB}] \wedge [\overrightarrow{DC}]| = |\vec{b} \wedge \vec{c}|$$

y

$$h = [\overrightarrow{DA}] \cos\alpha = |\vec{a}| \cos\alpha = |\vec{a}| \cos(\vec{a},\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Por consiguiente:

$$V = Sh = |\vec{b} \wedge \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{a},\vec{b} \wedge \vec{c}|$$
$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$$



(Fig. 13)

8.7. *Volumen del tetraedro.*

Consideremos el tetraedro de vértices $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ (Fig. 13). *El volumen del tetraedro es igual a un tercio del área de la base por la altura.*

$$V = \frac{1}{3} \text{ área del triángulo } (DBC) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{b} \wedge \vec{c}| \, h$$

$$V = \frac{1}{6} |\vec{b} \wedge \vec{c}| \, |\vec{a}| \cos\alpha = \frac{1}{6} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \frac{1}{6} [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

Ahora bien:

$$\vec{a} = [\overrightarrow{DA}] = (a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3)$$
$$\vec{b} = [\overrightarrow{DB}] = (b_1 - d_1, b_2 - d_2, b_3 - d_3)$$
$$\vec{c} = [\overrightarrow{DC}] = (c_1 - d_1, c_2 - d_2, c_3 - d_3)$$

Por tanto:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 - d_1 & a_2 - d_2 & a_3 - d_3 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \\ c_1 - d_1 & c_2 - d_2 & c_3 - d_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & a_1 - d_1 & a_2 - d_2 & a_3 - d_3 \\ 0 & b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \\ 0 & c_1 - d_1 & c_2 - d_2 & c_3 - d_3 \end{vmatrix}$$

Sumando la primera fila a las restantes en el último determinante se tiene:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplos:

- Hallar el producto mixto de los vectores $\vec{a}(1, 2, 1)$, $\vec{b}(3, 1, -2)$ y $\vec{c}(4, -1, 0)$.

  Solución

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -16 \ -3 \ -4 \ -2 = -25$$

- Probar que los puntos $P(2, 1, 6)$, $Q(3, 5, -2)$, $R(-4, 6, 8)$ y $S(5, 7, -1)$ son no coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.

  Solución

  Las coordenadas de los vectores $[\overrightarrow{PQ}]$, $[\overrightarrow{PR}]$ y $[\overrightarrow{PS}]$ son:

$$[\overrightarrow{PQ}] = (1, 4, -8), [\overrightarrow{PR}] = (-6, 5, 2), [\overrightarrow{PS}] = (3, 6, -7)$$

  Calculemos al producto mixto de estos vectores:

$$[[\overrightarrow{PQ}], [\overrightarrow{PR}], [\overrightarrow{PS}]] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -6 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = -35 + 24 + 288 + 120 - 168 - 12 = 217$$

  Como el producto mixto es distinto de cero, los tres vectores anteriores son *no coplanarios.*

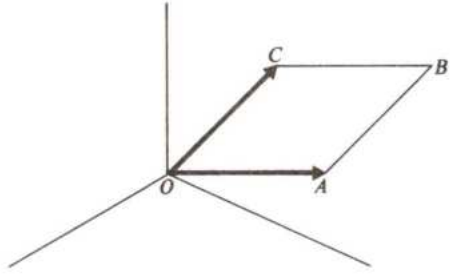
  El volumen del tetraedro que determinan es:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 217 = \frac{217}{6}$$

EJERCICIOS FINALES

1. Hallar dos vectores unitarios paralelos a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$.

2. Considerar el paralelogramo $OABC$ de la figura 14 y demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.



(Fig. 14)

Sugerencia: Poner $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$; $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ y calcular mediante productos escalares $|\overrightarrow{AC}|^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2$ y $|\overrightarrow{OB}|^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2$.

3. Calcular el valor de c para que los vectores $(2, 1, c)$ y $(5, -4, 2)$ sean perpendiculares.

4. Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{a}(8, -4, 3)$ y $\vec{b}(-8, 5, -3)$.

5. Dados los vectores $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b}(2, 5, 1)$ y $\vec{c} = (3, 1, 2)$, calcular:
   a) $\vec{a} \wedge \vec{b}$; b) $\vec{a} \wedge \vec{c}$; c) $\vec{a} \wedge \vec{a}$
   d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$; e) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{c})$
   f) Los cosenos directores del vector $\vec{b}$.

6. Encontrar un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(-1, 2, 4)$.

7. Calcular $(\vec{a} - \vec{c}) \wedge (\vec{b} - \vec{a})$, siendo $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$; $\vec{b} = 2\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3$; $\vec{c} = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 6\vec{u}_3$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal.

8. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ expresados en una base ortonormal son $\vec{a} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3$; $\vec{b} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$; $\vec{c} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$. Calcular:
   a) $\vec{a} \wedge \vec{b}$; b) $\vec{c} \wedge \vec{a}$;
   c) $\vec{b} \wedge \vec{c}$; d) $\vec{a} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})$; e) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$
   f) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$; g) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

9. Calcular el área del triángulo de vértices $A(0, 2, 3)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(2, 1, 2)$.

10. Calcular el área del cuadrilátero $A(0, 1, -2)$, $B(1, 0, -5)$, $C(1, 1, -4)$ y $D(2, -1, -8)$.

11. Calcular el volumen del tetraedro determinado por los puntos:
    $A(-1, 0, 1)$, $B(2, -4, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(-3, 0, 0)$.

TEMA 9 PROBLEMAS MÉTRICOS

En el tema anterior ya se han estudiado algunos problemas métricos, como el área del triángulo y el volumen del tetraedro. En este tema se resuelven otros problemas métricos utilizando como instrumento de cálculo el producto escalar y el producto vectorial. A lo largo del tema va a jugar un papel destacado el vector formado por los coeficientes de la ecuación del plano en su forma general (vector característico).

1 VECTOR CARACTERÍSTICO DE UN PLANO

Consideremos un plano π definido por su ecuación implícita o general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Vamos a probar que el vector $\vec{u} = (A,B,C)$ es perpendicular al plano π. Para ello, es suficiente probar que $\vec{u}$ es perpendicular a cualquier vector paralelo al plano π.

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos cualesquiera del plano π. El vector $[\overrightarrow{P_1P_2}] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ es un vector paralelo al plano π (Fig. 1).

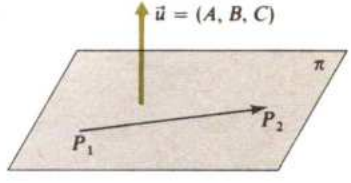
Por ser $P_1 \in \pi$, se verifica: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

Por ser $P_2 \in \pi$, se verifica: $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$.

Restando estas igualdades resulta:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

O, lo que es lo mismo, $\vec{u} \cdot [\overrightarrow{P_1P_2}] = 0$.



(Fig. 1)

Esta relación expresa que los vectores $\vec{u} = (A,B,C)$ y $[\overrightarrow{P_1P_2}]$ son perpendiculares; por tanto, el vector $\vec{u} = (A,B,C)$ es un vector perpendicular a cualquier vector paralelo al plano π, es decir, $\vec{u}$ es perpendicular al plano π. Este vector $\vec{u} = (A,B,C)$ se llama *vector característico del plano.*

Ejemplo:

- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 1, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{u} = (-1, 3, -2)$.

Solución

Para cualquier punto $X(x, y, z)$ del plano sabemos que se verifica: $\vec{u} \cdot [\overrightarrow{PX}] = 0$, es decir:

$$(-1, 3, -2) \cdot (x - 2, y - 1, z - 3) = 0$$

$$-1(x - 2) + 3(y - 1) - 2(z - 3) = 0$$

Luego la ecuación del plano pedida es: $-x + 3y - 2z + 5 = 0$

2 ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO

Hemos visto que el vector $\vec{u} = (A,B,C)$ es perpendicular al plano π de ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$ [1].

Si dividimos los dos miembros de la ecuación [1] por el módulo del vector $\vec{u}$, $|\vec{u}| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$, obtenemos la ecuación implícita del plano en la forma normal:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

La ecuación normal del plano también se puede escribir así:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Las coordenadas del vector unitario perpendicular al plano [1] son:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

que, según sabemos (ver tema anterior), son los cosenos directores del vector $\vec{u}$, también llamados cosenos directores del plano.

Ejemplo:

- La ecuación normal del plano $2x - y - 2z - 6 = 0$ se obtiene dividiendo los dos miembros por $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0$$

Los cosenos directores del plano son: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{1}{3}$; $\cos\gamma = \frac{2}{3}$

3 PROBLEMAS RESUELTOS

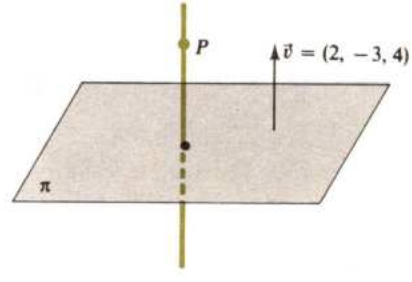
3.1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 2)$ y es perpendicular al plano π de ecuación $2x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Solución

Un vector director de la recta es el vector característico del plano $\vec{v}\,(2, -3, 4)$ (Figura 2).

Por consiguiente, la ecuación de la recta es:

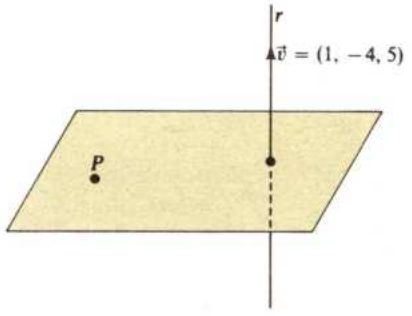
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{4}$$



(Fig. 2)

3.2. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y es perpendicular a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 7 - 4\lambda \\ z = -9 + 5\lambda \end{cases}$$



(Fig. 3)

Solución

El vector $\vec{v}(1, -4, 5)$ de dirección de la recta se puede considerar como el vector característico del plano, por lo que la ecuación del plano es de la forma $x-4y+5z+D=0$ (Fig. 3).

Para hallar el término independiente D imponemos la condición de que el punto P pertenece al plano; para ello sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano:

$$1 + 8 + D = 0; \quad D = -9$$

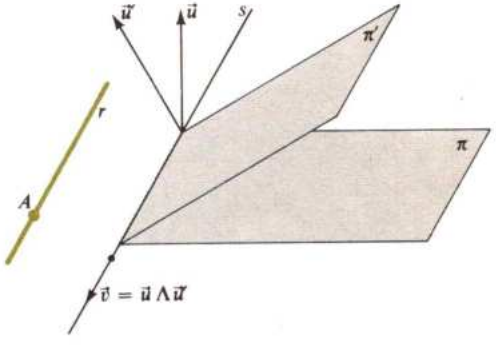
La ecuación del plano es: $x-4y+5z-9=0$.

3.3. Dados los planos π: $3x-2y-4z+9=0$ y π': $x+5y-6z-4=0$, hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(2, 5, 1)$ y es paralela a los dos planos.

Solución

Si r es paralela a π y π', será también paralela a la recta s de intersección de los dos planos $s = \pi \cap \pi'$ (Fig. 4), pues si r y s tuviesen un punto común, ese punto pertenecería al plano π y a π', con lo que r no sería paralela a dichos planos.

Sea $\vec{u} = (3, -2, -4)$ el vector característico del plano π y $\vec{u}' = (1, 5, -6)$ el vector característico del plano π'.



(Fig. 4)

El vector $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{u}'$, y por tanto paralelo a la recta r pedida:

$$\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}' = \left(\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) = (32, 14, 17)$$

La ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(2, 5, -1)$ y tiene por vector de dirección $\vec{v} = (32, 14, 17)$ es:

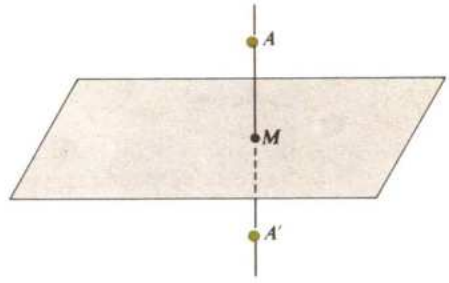
$$\frac{x-2}{32} = \frac{y-5}{14} = \frac{z+1}{17}$$

3.4. Hallar el simétrico $A'(x', y', z')$ del punto $A(0, 1, -2)$ respecto del plano $2x - y - z + 5 = 0$.

Solución

El vector característico del plano $\vec{u} = (2, -1, -1)$ es un vector de dirección de la recta AA' (Fig. 5). La ecuación de la recta AA' es:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$



(Fig. 5)

Sustituyendo en la ecuación del plano se obtiene el valor de λ, que da el punto de intersección M:

$2(2\lambda) - (1 - \lambda) - (-2 - \lambda) + 5 = 0$

$4\lambda - 1 + \lambda + 2 + \lambda + 5 = 0$

$6\lambda + 6 = 0;\ \lambda = -1$

De donde $M(-2, 2, -1)$.

Como M es el punto medio de AA', se tiene:

$$\left.\begin{aligned} -2 &= \frac{x' + 0}{2} \longrightarrow x' = -4 \\ 2 &= \frac{y' + 1}{2} \longrightarrow y' = 3 \\ -1 &= \frac{z' - 2}{2} \longrightarrow z' = 0 \end{aligned}\right\} \text{ es decir, } A'(-4, 3, 0)$$

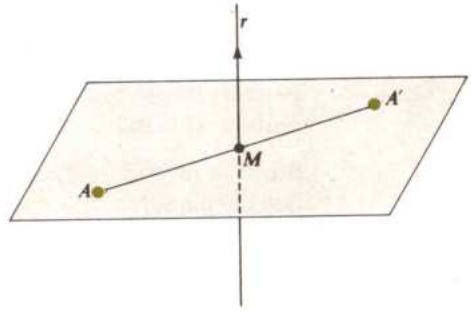
3.5. Hallar el simétrico $A'(x', y', z')$ del punto $A(1, 0, 2)$ respecto de la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$$

Solución

El plano perpendicular a la recta r que pasa por A tiene por vector característico un vector director de la recta $\vec{v} = (2, 3, -1)$ o cualquier vector proporcional a él (Fig. 6). Por consiguiente, la ecuación de dicho plano es de la forma

$$2x + 3y - z + D = 0$$



(Fig. 6)

Como A es un punto del plano, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0$; luego la ecuación del plano es: $2x + 3y - z = 0$.

El punto M de intersección de la recta con el plano lo hallamos sustituyendo en la ecuación del plano:

$$2(1+2t) + 3(-1+3t) + t = 0, \text{ de donde } t = \frac{1}{14}$$

Llevando $t = \frac{1}{14}$ a las ecuaciones de la recta resulta: $M\left(\frac{16}{14}, \frac{-11}{14}, \frac{-1}{14}\right)$.

Aplicando las fórmulas del punto medio de un segmento se tiene:

$$\frac{16}{14} = \frac{x' + 1}{2} \longrightarrow x' = \frac{9}{7}$$

$$\frac{-11}{14} = \frac{y' + 0}{2} \longrightarrow y' = \frac{-11}{7}$$

$$\frac{-1}{14} = \frac{z' + 2}{2} \longrightarrow z' = \frac{-15}{7}$$

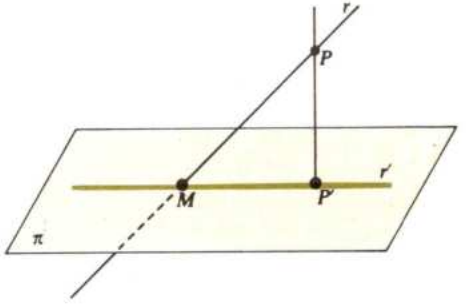
Es decir: $A'\left(\frac{9}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{-15}{7}\right)$

3.6. Hallar la ecuación de la proyección r' de la recta r: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ sobre el plano π: $2x - y + 3z + 6 = 0$.

Solución

La proyección P' de un punto P sobre el plano π (Fig. 7) es la intersección con el plano de la perpendicular a π trazada por el punto P.

La recta r', proyección de la recta r sobre π, se obtiene hallando la proyección de dos puntos de r; uno de ellos puede ser el punto de corte M y el otro un punto cualquiera.



(Fig. 7)

Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación del plano resulta:

$$2(2+t) - (1+2t) - 3t + 6 = 0$$

de donde $t = 3$.

Llevando t a las ecuaciones paramétricas de r resulta: $M(5, 7, -3)$.

Otro punto de la recta r es $P(2, 1, 0)$.

La ecuación de la recta PP' perpendicular a π tiene por vector de dirección el vector característico del plano $(2, -1, 3)$.

Ecuaciones paramétricas de PP': $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

El punto P' de corte con el plano lo hallamos sustituyendo en la ecuación del plano: $2(2+2t)-(1-t)+9t+6=0$, de donde $t = \frac{9}{14}$ y $P'\left(\frac{46}{14}, \frac{5}{14}, \frac{27}{14}\right)$.

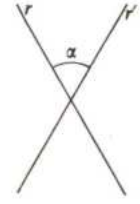
Un vector de dirección de r' (proyección de r sobre π) es $MP' = \frac{-24}{14}, \frac{-93}{14}, \frac{69}{14}$ y otro es $(-24, -93, 69)$.

Por consiguiente, unas ecuaciones paramétricas de r' son: $\begin{cases} x = 5 - 24t \\ y = 7 - 93t \\ z = -3 + 69t \end{cases}$

4 ÁNGULO DE DOS RECTAS

4.1. *Se llama ángulo de dos rectas r y r' que se cortan* (Fig. 8) *al menor de los dos ángulos que forman en el plano que determinan*, es decir, al ángulo agudo o recto que determinan.

En la figura 8 el ángulo que forman r y r' es α.

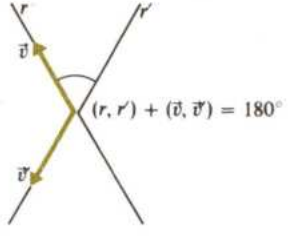


(Fig. 8)

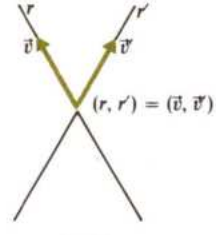
Supongamos que los vectores de dirección de las rectas r y r' son $\vec{v}$ y $\vec{v}'$, respectivamente.

Designemos por (r, r') el ángulo formado por las rectas r y r' y por $(\vec{v}, \vec{v}')$ el ángulo formado por $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.

Según el sentido de estos vectores coincidirán o no los ángulos (r, r') y $(\vec{v}, \vec{v}')$ (figuras 9 y 10).



(Fig. 9)



(Fig. 10)

En la figura 10, $(r,r') = (\vec{v},\vec{v}')$; por consiguiente, $\cos(r,r') = \cos(\vec{v},\vec{v}')$.

En la figura 9, los ángulos (r,r') y $(\vec{v},\vec{v}')$ son suplementarios, y $\cos(r,r') = -\cos(\vec{v},\vec{v}')$.

En los dos casos se verifica: $\cos(r,r') = |\cos(\vec{v},\vec{v}')|$.

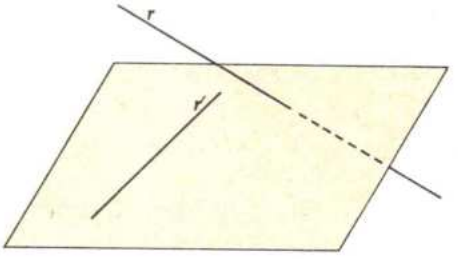
Si las rectas r y r' tienen por ecuaciones:

$$r: \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}; \quad r': \frac{x - x_1}{v'_1} = \frac{y - y_1}{v'_2} = \frac{z - z_1}{v'_3}$$

entonces $\cos(r,r') = |\cos(\vec{v},\vec{v}')| = \dfrac{|v_1v'_1 + v_2v'_2 + v_3v'_3|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{v'^2_1 + v'^2_2 + v'^2_3}}$

4.2. Supongamos que las rectas r y r' se cruzan (Fig. 11).

En este caso se define el ángulo de las rectas r y r' como el ángulo formado por las paralelas a ambas trazadas por un punto cualquiera del espacio; por consiguiente, la fórmula anterior es válida para el cálculo del ángulo que forman dos rectas que se cruzan.



(Fig. 11)

Ejemplo:

- El ángulo que forman las rectas

$$r\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{5};\ \vec{v} = (1, -1, 5)$$

$$r'\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1};\ \vec{v}' = (2, 1, -1)$$

viene dado por

$$\cos(r, r') = |\cos(\vec{v}, \vec{v}')| = \frac{|1\cdot 2 - 1\cdot 1 - 5\cdot 1|}{\sqrt{1+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{|2-1-5|}{\sqrt{27}\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{18}} = \frac{4}{9\sqrt{2}}$$

5 ÁNGULO DE DOS PLANOS

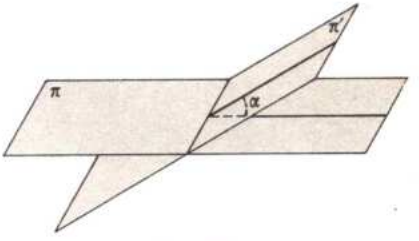
Consideremos dos planos π y π' que se cortan (Fig. 12) de ecuaciones

$$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi'\colon A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Al cortarse los planos π y π' (Fig. 12) forman cuatro ángulos diedros, iguales dos a dos. Por definición, el ángulo de dos planos π y π' es el *menor* de los ángulos diedros que determinen.

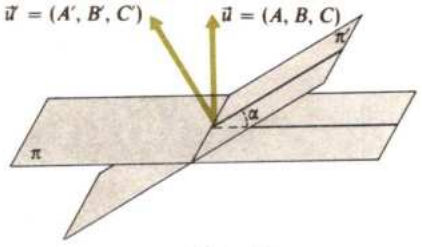
En la figura 12 el ángulo plano α es el ángulo que forman π y π'.



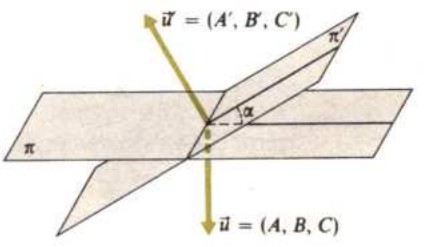
(Fig. 12)

Designemos por $\vec{u} = (A,B,C)$ y $\vec{u}' = (A',B',C')$ los vectores característicos de los planos π y π', respectivamente.

Dependiendo del sentido de estos vectores, el ángulo (π,π') que forman los planos π y π' será igual o suplementario del ángulo $(\vec{u},\vec{u}')$ que forman sus vectores característicos (ver Figs. 13 y 14).



(Fig. 13)



(Fig. 14)

En la figura 13, $\alpha = (\pi,\pi') = (\vec{u},\vec{u}')$, y por tanto, $\cos(\pi,\pi') = \cos(\vec{u}\,\vec{u}')$.

En la figura 14 los ángulos $\alpha = (\pi,\pi')$ y $(\vec{u},\vec{u}')$ son suplementarios y $\cos(\pi,\pi') = -\cos(\vec{u},\vec{u}')$.

En los dos casos se verifica: $\cos(\pi,\pi') = |\cos(\vec{u},\vec{u}')|$.

Por tanto: $\cos\alpha = \cos(\pi,\pi') = |\cos(\vec{u},\vec{u}')| = \dfrac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

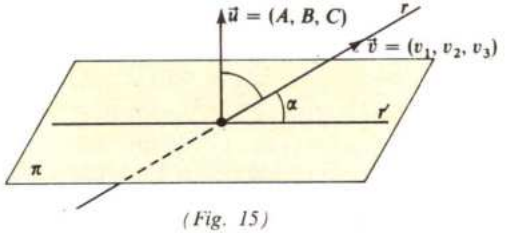
Ejemplo:

- El ángulo que forman los planos $3x - 2y + z + 1 = 0$ y $2x + 5y - 2z + 2 = 0$ viene dado por: $\cos\alpha = \cos(\pi, \pi') = |\cos(\vec{v}, \vec{v})|$. Como $\vec{v} = (3, -2, 1)$ y $\vec{v}' = (2, 5, -2)$ resulta:

$$\cos(\pi, \pi') = |\cos(\vec{v}, \vec{v})| = \frac{|3\cdot 2 - 2\cdot 5 - 1\cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 5^2 + (-2)^2}} = \frac{|6 - 10 - 2|}{\sqrt{14}\sqrt{33}} = \frac{6}{\sqrt{462}}$$

6 ÁNGULO DE RECTA Y PLANO

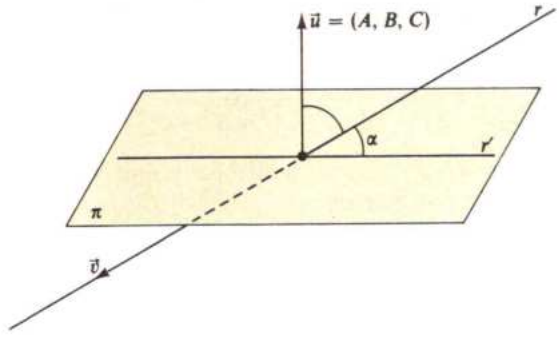
Se llama ángulo de una recta r con un plano π, (r,π), *al ángulo agudo que forma la recta r con su proyección r' sobre el plano* π (Fig. 15).



(Fig. 15)

El ángulo α que forma la recta r de ecuación $\dfrac{x - x_1}{v_1} = \dfrac{y - y_1}{v_2} = \dfrac{z - z_1}{v_3}$ con el plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$ es complementario del ángulo que forma el vector de dirección de la recta con el vector característico del plano $\vec{u}(A,B,C)$ (Fig. 15).

Si alguno de los vectores $\vec{u}$ o $\vec{v}$ tuvieran sentido opuesto al indicado (Fig. 16), tomaríamos el coseno en valor absoluto y, en todo caso, $\operatorname{sen}\alpha = |\cos(\vec{v},\vec{u})|$.



(Fig. 16)

Luego $$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(r,\pi) = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

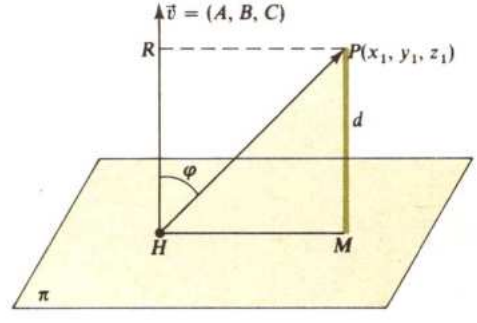
Ejemplo:

- El ángulo que forma la recta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ con el plano $x + 3y + z - 5 = 0$ viene dado por

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 3 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|1+6-1|}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}}$$

7 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

7.1. Sea un plano π de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ y P un punto de coordenadas (x_1,y_1,z_1) respecto de un sistema ortonormal. La perpendicular de P al plano π corta a este plano en un punto M. El segmento de perpendicular MP es la distancia d del punto al plano que queremos encontrar. Ahora bien, el segmento $\overline{MP}$ es igual a la proyección $\overline{HR}$ del vector $\overline{HP}$ sobre el vector $\vec{v} = (A,B,C)$ característico del plano (Fig. 17). Se tiene entonces:



(Fig. 17)

$$\vec{v}\cdot[\overline{HP}] = |\vec{v}|\cdot|\overline{HP}|\cos\varphi = |\vec{v}|\cdot\overline{RH} = |\vec{v}|\,d$$

Si las coordenadas de H son (x_0,y_0,z_0) y despejamos d de la relación anterior, resulta:

$$d(P,\pi) = d = \frac{\vec{v}\cdot[\overrightarrow{HP}]}{|\vec{v}|} = \frac{(A,B,C)\cdot(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{A(x_1-x_0) + B(y_1-y_0) + C(z_1-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{Ax_1+By_1+Cz_1 - (Ax_0+By_0+Cz_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad [1]$$

Pero al ser $H(x_0,y_0,z_0)$ un punto del plano π, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano; por consiguiente: $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, es decir,

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

Sustituyendo en [1] resulta:

$$\boxed{d = \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

El numerador de la fórmula anterior puede ser positivo o negativo; nosotros tomaremos siempre su valor absoluto $d = \dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Se puede probar, aunque aquí no lo haremos, que los puntos para los cuales $Ax+By+Cz+D>0$ son los puntos de uno de los dos semiespacios que determina el plano. Dos puntos del otro semiespacio verifican $Ax+By+Cz+D<0$, y los puntos del plano verifican la ecuación del plano: $Ax+By+Cz+D=0$.

Ejemplo:

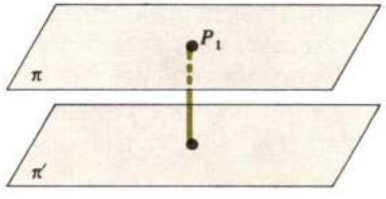
- La distancia del punto $P(2, 1, 0)$ al plano π de ecuación $x - y + 3z + 4 = 0$ es:

$$d(P,\pi) = \frac{|1\cdot 2 - 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|2 - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

7.2. *Distancia entre dos planos paralelos.*

La distancia entre dos planos se puede hallar sin más que calcular la distancia de un punto de uno de ellos al otro plano (Fig. 18). Así, dados los planos π y π' paralelos, sus ecuaciones difieren únicamente en los términos independientes:

π: $Ax+By+Cz+D = 0$
π': $Ax+By+Cz+D' = 0$



(Fig. 18)

Si $P_1(x_1,y_1,z_1)$ es un punto del plano π, entonces:

$$d(\pi,\pi') = d(P_1,\pi') = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ya que $-D = Ax_1+By_1+Cz_1$ por ser P_1 un punto del plano π.

Ejemplo:

- La distancia entre los planos $3x - 2y + 4z - 6 = 0$ y $3x - 2y + 4z + 2 = 0$ es igual a:

$$\frac{|2-(-6)|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}}$$

8 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

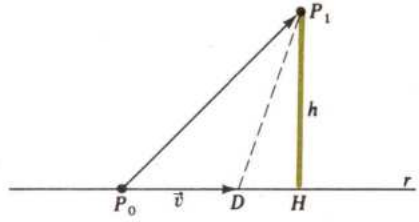
Sea el punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y la recta r que pasa por el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y tiene por vector de dirección $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ (Fig. 19).

$$r: \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

Pretendemos encontrar la distancia de P_1 a r:

$$d(P_1,r) = P_1H = h$$

Supongamos que $\overrightarrow{P_0D}$ es un representante del vector de dirección $\vec{v}$ de la recta r.



(Fig. 19)

El área del triángulo $\widehat{P_0DP_1}$ la podemos calcular de dos modos:

1) Area $(P_0DP_1) = \frac{1}{2}\,|\vec{v} \wedge [\overrightarrow{P_0P_1}]|$ (ver tema anterior).

2) Area $(P_0DP_1) = \frac{1}{2}\,|\vec{v}|\,h$.

Igualando las expresiones anteriores, que nos dan la misma área, se tiene:

$$\frac{1}{2}\,|\vec{v} \wedge [\overrightarrow{P_0P_1}]| = \frac{1}{2}\,|\vec{v}|\,h$$

$$h = \frac{|\vec{v} \wedge [\overrightarrow{P_0P_1}]|}{|\vec{v}|}$$

Teniendo en cuenta que las coordenadas de $[P_0P_1]$ son $(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ y que el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus coordenadas resulta la siguiente expresión para la distancia del punto P_1 a la recta r:

$$d(P_1,r) = h = \frac{|\vec{v} \wedge [\overrightarrow{P_0P_1}]|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Ejemplo:

- La distancia del punto $P_1(5, -3, 6)$ a la recta $r = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$ es:

$$d(P,r) = \frac{|\vec{v} \wedge [\overrightarrow{P_0P_1}]|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{4+16+1}} = \sqrt{\frac{545}{21}} \simeq 5{,}09$$

Nota. Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas, basta calcular la distancia de un punto de una de ellas a la otra.

9 DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

9.1. Sean las rectas r_1 y r_2:

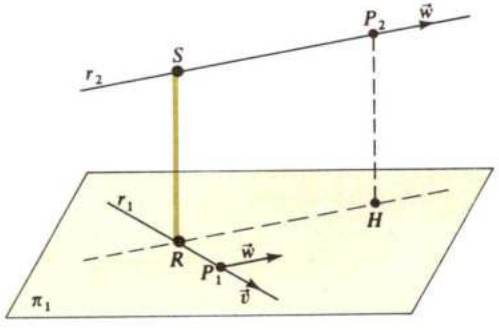
$$r_1: \frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}; \quad r_2: \frac{x-x_2}{w_1} = \frac{y-y_2}{w_2} = \frac{z-z_2}{w_3}$$

La recta r_1 pasa por el punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y tiene por vector de dirección $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, y la recta r_2 pasa por el punto $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y tiene por vector de dirección $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$ (figura 20).

El plano π_1 que pasa por r_1 y es paralelo a r_2 queda determinado por el punto P_1 de r_1 y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es decir, $(P_1,\vec{v},\vec{w})$ es una determinación lineal del plano π_1.

La ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x-x_1 \\ v_2 & w_2 & y-y_1 \\ v_3 & w_3 & z-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



(Fig. 20)

Como la recta r_2 es paralela al plano π_1, todos los puntos de r_2 equidistan de este plano. A la distancia de un punto cualquiera de r_2 al plano π_1 se la llama *distancia mínima* entre las rectas r_1 y r_2.

Teniendo en cuenta que la ecuación de este plano en forma general tiene por coeficientes

$$A = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

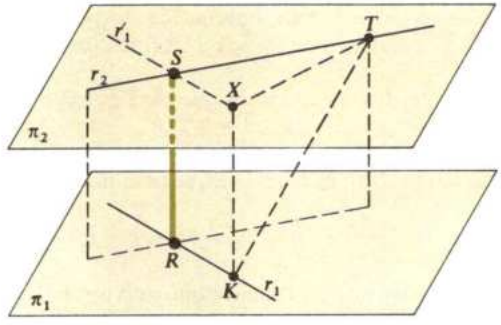
y la fórmula de la distancia de un punto a un plano, resulta que la distancia de P_2 al plano π_1 (que es la distancia entre r_1 y r_2) es:

$$P_2H = d(r_2,r_1) = d(P_2,\pi_1) = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x_2-x_1 \\ v_2 & w_2 & y_2-y_1 \\ v_3 & w_3 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Esta distancia P_2H es igual a $\overline{RS}$ (ver Fig. 20), donde R es el punto de intersección de r_1 con la proyección sobre π_1 de r_2.

9.2. Se puede probar que el segmento $\overline{RS}$ es menor que cualquier otro segmento que una un punto de r_1 y un punto de r_2.

Para probarlo tracemos el plano π_2 que pasa por r_2 y es paralelo a r_1; los planos π_2 y π_1 son paralelos. Tracemos también la proyección de r_1' de r_1 sobre π_2 (Fig. 21).



(Fig. 21)

Consideremos el segmento $\overline{KT}$, $K \in r_1$ y $T \in r_2$.

Los vectores $\overrightarrow{TX}$ y $\overrightarrow{KX}$ son perpendiculares, pues $[\overrightarrow{KX}] = [\overrightarrow{RS}]$ y $\overrightarrow{TX}$ está contenido en el plano π_2.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\widehat{KTX}$ se tiene:

$$\overline{KT}^2 = \overline{KX}^2 + \overline{TX}^2 \Rightarrow \overline{KT}^2 > \overline{KX}^2 = \overline{RS}^2$$

De donde $\overline{KT}^2 \geq \overline{RS}^2$, o también $d(K,T) \geq d(R,S)$.

Es decir, $\overline{RS}$ es el menor de los segmentos que se pueden formar uniendo un punto de r_1 y un punto de r_2; por esta razón, $\overline{RS}$ se llama *mínima distancia* entre las rectas que se cruzan r_1 y r_2.

Ejemplo:

- Calculemos la distancia entre las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}\ ;\ r_2: \frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$$

El plano π_1 que pasa por r_1 y es paralelo a r_2 es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 3 & 3 & y-1 \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien, } \pi_1: x - y + z - 1 = 0$$

La distancia del punto $P_2(5, 2, 1)$ de r_2 al plano π_1 es la distancia entre las rectas r_1 y r_2:

$$d(r_1, r_2) = d(P_2, r_1) = \frac{1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{5 - 2 + 1 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

EJERCICIOS FINALES

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2, 0, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{u} = (2, 1, -3)$.

2. Aplicando el producto vectorial, hallar la dirección de la recta r intersección de los planos $\pi: 2x + y - z + 6 = 0$ y $\pi': 3x - 2y + z - 1 = 0$.

3. Escribir en forma normal la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 2)$, $B(-8, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ y hallar los cosenos directores del mismo.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 1, -3)$ y es perpendicular al plano π de ecuación $\pi: x - 2y + z + 2 = 0$.

5. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(1, 0, 2)$ y es paralela a los planos π y π':

$$\pi: x - 2y + 3z + 1 = 0 \; ; \; \pi': 2x - 3y + z + 6 = 0$$

6. Hallar la ecuación de un plano π que pasa por $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $A(2, 0, 4)$, $B(8, 1, 6)$.

7. Hallar el simétrico $A'(x', y', z')$ del punto $A(2, 2, 1)$ respecto del plano $x - 2y + z + 6 = 0$.

8. Hallar el simétrico del punto $A(2, 0, 3)$ respecto de la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, 3)$ y es perpendicular al plano dado por $2x - y + z - 4 = 0$.

10. Hallar la proyección del punto $P(1, 0, 4)$ sobre el plano $\pi: 2x - y + z + 2 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la proyección de $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{3}$ sobre el plano $\pi: x + 2y - z + 4 = 0$.

12. Hallar el ángulo que forman las rectas $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ y $r': \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y+7}{-4} = \dfrac{z}{2}$ averiguando previamente la posición que ocupan.

13. Hallar el ángulo que forman las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 8s \\ y = 2 - 4s \\ z = \quad 3s \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \quad -8t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

14. Averiguar el ángulo que forman los planos π y π':

$$\pi: 2x + 4y - z + 8 = 0; \quad \pi': x + y + 6z - 6 = 0$$

15. Hallar el seno del ángulo α que forma la recta

$$r: \begin{cases} x = \quad 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases} \text{ y el plano } 5x + 4y - 2z + 5 = 0.$$

16. Hallar la distancia del punto $P(2, 4, 1)$ al plano π: $3x + 4y + 12z - 7 = 0$.

17. Hallar la distancia que hay entre los planos paralelos.

$$\pi: 3x + y - z - 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi': 3x + y - z - 8 = 0$$

18. Comprobar que la recta r: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-7}{-1}$ es paralela al plano π: $x + 2y + 3z = 0$ y hallar la distancia de la recta al plano.

19. Hallar la distancia entre las rectas paralelas r_1 y r_2 en cada caso:

a) $r_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

b) $r_1: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$; $r_2: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{3}$

20. Probar que las rectas $r_1: \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ se cruzan y hallar la distancia entre ellas.

21. Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2 en los siguientes casos:

a) $r_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

b) $r_2: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$

TEMA 10 TRANSFORMACIONES EN EL PLANO EUCLÍDEO

Este tema está dedicado al estudio de las isometrías del plano (es decir, transformaciones puntuales del plano en sí mismo que conservan las distancias). Después de la definición de isometría se estudian las simetrías ortogonales axiales, dada su importancia como generadores del grupo de las isometrías (= movimientos). A continuación se clasifican las isometrías en función de su paridad y del conjunto de sus puntos fijos. Una vez realizada dicha clasificación, se estudia cada tipo particular de isometría, obteniendo sus propiedades más importantes, así como su expresión analítica.

1 ISOMETRÍAS

1.1. Consideremos el plano euclídeo $\mathscr{E}_2$. Una aplicación f: $\mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_2$ se dice una *isometría* si verifica la condición siguiente:

i) f conserva las distancias, es decir, para todo par de puntos P, $Q \in \mathscr{E}_2$ se tiene $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.

Se recuerda que $d(P,Q)$ indica la distancia entre los puntos P y Q, y por tanto, $d(P,Q)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ determinado por P y Q.

1.2. El conjunto de las isometrías de $\mathscr{E}_2$ se representa por $\mathrm{Ism}(\mathscr{E}_2)$. Algunos autores llaman a las isometrías movimientos o congruencias.

1.3. *La composición de dos isometrías es una isometría que se llama el producto de las isometrías dadas.*

En efecto, sean f y g dos isometrías; tenemos que demostrar que $g \circ f$ verifica i) de **1.1**.

Sean $P,Q \in \mathscr{E}_2$; entonces:

$$d((g \circ f)(P), (g \circ f)(Q)) = d(g(f(P)), g(f(Q))) \overset{①}{=} d(f(P), f(Q)) \overset{②}{=} d(P,Q)$$

como queríamos demostrar.

La igualdad ① es consecuencia de ser g una isometría; la ② lo es de ser f una isometría.

1.4. La identidad de $\mathscr{E}_2$ es una isometría.

En efecto, si $1_{\mathscr{E}_2}$ representa la identidad de $\mathscr{E}_2$ y si P y $Q \in \mathscr{E}_2$,

$$d(1_{\mathscr{E}_2}(P),\ 1_{\mathscr{E}_2}(Q)) = d(P,Q)$$

Ejercicios:

1. Demostrar que una isometría es siempre una aplicación inyectiva. (De hecho, como veremos más adelante, es siempre biyectiva.)

2. Sea f una isometría biyectiva. Demostrar que f^{-1} es una isometría.

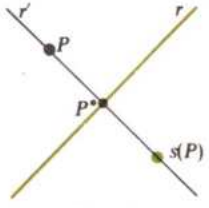
3. Demostrar que una isometría transforma un segmento en otro de la misma longitud. (Se admitirá la observación hecha en el ejercicio 1 de que una isometría es biyectiva.)

4. Demostrar que una isometría transforma un triángulo en otro de la misma área.

2 SIMETRÍAS ORTOGONALES AXIALES

Vamos a estudiar en este apartado un ejemplo muy importante de isometrías, que son las llamadas simetrías ortogonales axiales.

2.1. Sea r una recta de $\mathscr{E}_2$. Se llama *simetría ortogonal axial respecto de r* a la aplicación $s: \mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_2$ que a cada punto P de $\mathscr{E}_2$ hace corresponder el punto $s(P)$ construido de la siguiente forma: Por P se traza la perpendicular r' a r; sea P^* el punto de intersección de r y r'; entonces, $s(P)$ es el punto tal que P^* es el punto medio de P y $s(P)$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

El punto $s(P)$ se llama el *simétrico de P respecto de r* y r se llama la *base o eje de simetría.*

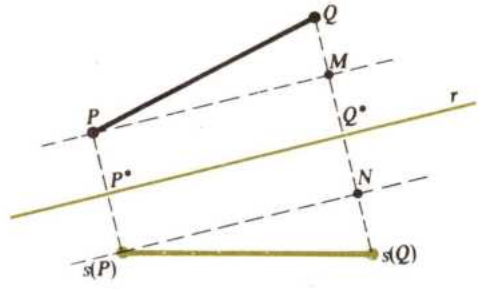
2.2. Si s es la simetría ortogonal axial respecto de la recta r, entonces se verifica:

a) Si P es un punto de r, $s(P) = P$.
b) $s \circ s = 1_{\mathscr{E}_2}$.
c) Si $P \in \mathscr{E}_2$, $d(P,r) = d(s(P),r)$, donde $d(P,r)$ representa la distancia del punto P a la recta r.

Estas propiedades son consecuencia inmediata de la definición de simetría ortogonal axial. Obsérvese que de b) se deduce que s es biyectiva, pues tiene inversa que coincide con ella misma, es decir $s^{-1} = s$.

2.3. Las simetrías ortogonales axiales son isometrías. En efecto, sea s la simetría respecto de la recta r y sean $P,Q \in \mathscr{E}_2$. Tenemos que demostrar que $d(s(P),s(Q)) = d(P,Q)$.

Tracemos por P y $s(P)$ paralelas a r y sean M y N los puntos de intersección de estas rectas con la recta $Qs(Q)$, como se indica en la figura 2.



(Fig. 2)

Los triángulos $\widehat{PQM}$ y $\widehat{s(P)s(Q)N}$ son rectángulos. Por el teorema de Pitágoras:

$$d(s(P), s(Q)) = \sqrt{[d(s(P),N)]^2 + [d(N,s(Q))]^2} = \sqrt{[d(P,M)]^2 + [d(M,Q)]^2} = \\ = d(P,Q)$$

2.4. Sean P y Q dos puntos distintos de $\mathscr{E}_2$; entonces existe una y solamente una simetría ortogonal axial s tal que $s(P) = Q$.

Observemos que una simetría ortogonal axial queda determinada al conocer la recta r respecto de la que se realiza la simetría. Si la simetría debe transformar el punto P en el Q, entonces la recta r debe ser perpendicular a la recta $\overline{PQ}$; por otra parte, el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ debe pertenecer a r, luego r es la perpendicular a $\overline{PQ}$ en su punto medio, es decir, la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$. Entonces la simetría s respecto de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ es la simetría buscada.

2.5. *Ecuación de una simetría ortogonal axial.*

Dado un sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ de $\mathscr{E}_2$, vamos a continuación a hallar las ecuaciones de una simetría respecto de la recta $y = mx + p$; es decir, vamos a encontrar unas fórmulas que nos permitan hallar las coordenadas (x',y') del simétrico de un punto dado P de coordenadas (x,y).

Sea $P = (x_0,y_0)$ un punto y sea $P' = s(P) = (x'_0,y'_0)$ el simétrico de P respecto de la recta de ecuación $y = mx + p$. Procederemos de la siguiente forma:

1) Perpendicular a la recta $y = mx + p$ y que pasa por P:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

es decir: $my + x = my_0 + x_0$.

2) Coordenadas del punto P^* de intersección de las rectas

$$\begin{cases} my + x = my_0 + x_0 \\ y = mx + p \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se tiene $P^* = \left(\dfrac{my_0 + x_0 - mp}{m^2 + 1}, \dfrac{m^2y_0 + mx_0 + p}{m^2 + 1}\right)$

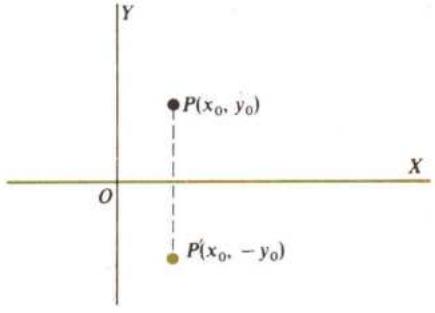
3) Como P^* es el punto medio de $P(x_0,y_0)$ y $P'(x'_0,y'_0)$, se tiene:

$$\frac{x_0 + x'_0}{2} = \frac{my_0 + x_0 - mp}{m^2 + 1}$$

$$\frac{y_0 + y'_0}{2} = \frac{m^2y_0 + mx_0 + p}{m^2 + 1}$$

de donde:

$$\begin{cases} x'_0 = \dfrac{(1 - m^2)x_0 + 2my_0 - 2mp}{m^2 + 1} \\ y'_0 = \dfrac{2mx_0 - (1 - m^2)y_0 + 2p}{m^2 + 1} \end{cases} \quad [1]$$



Veamos algunos casos particulares:

a) *Simetría respecto del eje OX* (Fig. 3).

En este caso $y = 0$, es decir, $m = 0 = p$

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \\ y'_0 = -y_0 \end{cases}$$

(Fig. 3)

b) *Simetría respecto de una recta que pasa por el origen* (Fig. 4).

En este caso, $y = mx$, es decir, $p = 0$.

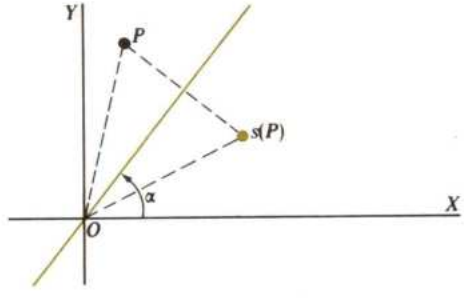
$$\begin{cases} x'_0 = \dfrac{(1 - m^2)x_0 + 2my_0}{m^2 + 1} \\ y'_0 = \dfrac{2mx_0 - (1 - m^2)y_0}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $m = \text{tg}\alpha$, donde α es el ángulo que forma la parte positiva del eje OX y la recta, y recordando las fórmulas trigonométricas:

$$\frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$$

$$\frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} = \text{sen}2\alpha$$

se tiene $\begin{cases} x'_0 = (\cos 2\alpha)x_0 + (\text{sen}2\alpha)y_0 \\ y'_0 = (\text{sen}2\alpha)x_0 - (\cos 2\alpha)y_0 \end{cases}$



(Fig. 4)

Nota. Se observará que las ecuaciones [1] permiten calcular las ecuaciones de las simetrías respecto de cualquier recta no paralela al eje OY. Este caso es trivial y se deja como ejercicio. Las ecuaciones [1] pueden resultar al principio difíciles de memorizar; afortunadamente, esto no es necesario, pues se puede en cada caso particular proceder como se hizo en el proceso seguido para obtenerlas. A continuación damos un ejemplo.

Ejemplo:

- Encontrar el simétrico del punto (1, 2) respecto de la recta r de ecuación $y = 2x + 8$.

  i) Pendiente de la recta r, $m = 2$.

ii) Ecuación de r', perpendicular a r por (1, 2),

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

es decir, $2y + x = 5$.

iii) Punto de intersección de r y r'. Solución del sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 8 \\ 2y + x = 5 \end{cases} \qquad x = \frac{-11}{5} \;\; ; \;\; y = \frac{18}{5}$$

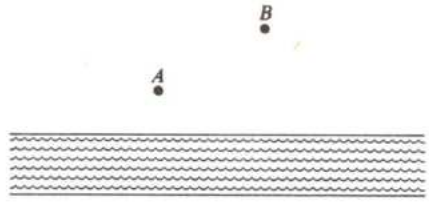
iv) Si $P' = (x', y')$ es el simétrico de $P = (1, 2)$, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1 + x'}{2} = \dfrac{-11}{5} \\[2ex] \dfrac{2 + y'}{2} = \dfrac{18}{5} \end{array}\right\} \quad \text{de donde } x' = \frac{-27}{5} \;\; ; \;\; y' = \frac{26}{5}$$

Luego el punto es $P' = \left(\dfrac{-27}{5}, \dfrac{26}{5}\right)$

Ejercicios:

1. Encontrar el simétrico del punto (1, 2) respecto de la recta de ecuación $x = -2$.
2. Encontrar las ecuaciones de la simetría respecto de la recta $x = a$.
3. Encontrar las ecuaciones de la simetría respecto de la recta $y = x$.
4. ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico de (2, 2) respecto de la recta $y = \frac{1}{2}x$?
5. Una simetría respecto de una recta r transforma el punto de coordenadas (2, 7) en el (4, 5). ¿Cuál es la ecuación del eje de la simetría?
6. Dos ciudades A y B están situadas a la misma orilla de un río, como se indica en la figura 5.



(Fig. 5)

Se quiere construir una carretera que enlace A y B y que toque la orilla del río.

Dibujar gráficamente el trazado de la carretera que supone mínimo recorrido.

3 PUNTOS FIJOS DE UNA ISOMETRÍA

3.1. Sea f una isometría de $\mathscr{E}_2$. Un punto P de $\mathscr{E}_2$ se dice un *punto fijo de* f si $f(P) = P$.

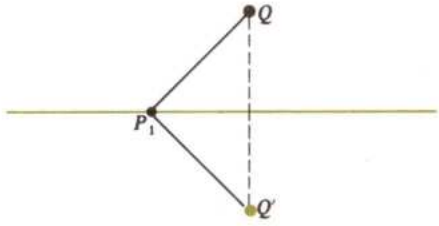
Por ejemplo, todos los puntos de $\mathscr{E}_2$ son puntos fijos de la identidad. Si s es una simetría de eje la recta r, entonces todo punto de r es un punto fijo de s.

3.2. *Si una isometría tiene tres puntos fijos que no están alineados, entonces es la identidad.*

En efecto, sea f una isometría y sean P_1, P_2, P_3 tres puntos no alineados y que sean puntos fijos de f, es decir, $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_2$ y $f(P_3) = P_3$. Tenemos que demostrar que $f = 1_{\mathscr{E}_2}$; es decir, que para todo $P \in \mathscr{E}_2$, $f(P) = P$.

Supongamos que Q es tal que $Q' = f(Q) \neq Q$. Observemos en la figura 6 que por ser f una isometría, $d(P_1,Q) = d(f(P_1), f(Q)) = d(P_1,Q')$

Por lo tanto, P_1 está en la mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$. Análogamente, razonando con P_2 y P_3 resulta que P_2 y P_3 deben también estar en la mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$. Por tanto, P_1, P_2 y P_3 están sobre dicha recta, pero esto no puede suceder, pues hemos dicho que P_1, P_2 y P_3 no están alineados. Por tanto, debe ser $f(Q) = Q$ para todo $Q \in \mathscr{E}_2$ y $f = 1_{\mathscr{E}_2}$.



(Fig. 6)

3.3. *Si una isometría f tiene al menos dos puntos fijos, entonces f es la identidad o la simetría axial respecto de la recta que une dichos puntos.*

Supongamos P_1 y P_2 dos puntos fijos de f. Si $f = 1_{\mathscr{E}_2}$ ya está demostrado; supongamos entonces $f \neq 1_{\mathscr{E}_2}$, y sea Q un punto no perteneciente a la recta P_1P_2; entonces, $f(Q) \neq Q$, porque si $f(Q) = Q$ entonces f tendría tres puntos fijos no alineados, y por **3.2** f sería la identidad, cosa que hemos supuesto no sucede. Sea entonces $Q' = f(Q) \neq Q$; razonando de modo análogo a **3.2** resulta que P_1 y P_2 pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$, pero como una recta está determinada por dos de sus puntos, resulta que la recta P_1P_2 es la mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$, luego f es la simetría respecto de P_1P_2. (Es trivial comprobar que los puntos de la recta P_1P_2 son fijos.)

3.4. *Toda isometría que tiene al menos un punto fijo es o bien la identidad o una simetría o el producto de dos simetrías.*

Sea f una isometría y sea P un punto fijo de f. Si $f = 1_{\mathscr{E}_2}$, ya está demostrado; si $f \neq 1_{\mathscr{E}_2}$ existe al menos un punto Q tal que $Q' = f(Q) \neq Q$. Como en los teoremas anteriores, al ser P fijo, P pertenece a la mediatriz de $\overline{QQ'}$. Sea s_1 la simetría respecto de la mediatriz de $\overline{QQ'}$ y consideremos $s_1 \circ f$, que por **1.3** es una isometría; entonces:

$s_1 \circ f(P) = s_1(f(P)) = s_1(P) = P$ (ya que $s_1(P) = P$, por pertenecer P al eje de simetría).

$$s_1 f(Q) = s_1(Q') = Q$$

Luego $s_1 \circ f$ tiene al menos dos puntos fijos, por **3.3**:

$$s_1 \circ f = 1 \text{ ó } s_1 \circ f = s_2$$

Multiplicando por s_1 y teniendo en cuenta que $s_1^2 = 1$, se tiene $f = s_1 \circ f = s_1 \circ s_2$.

Ejercicios:

1. Sea f una isometría de $\mathscr{E}_2$; una recta r se dice *globalmente invariante* si para todo punto P de r, $f(P)$ pertenece a r. Encontrar las rectas globalmente invariantes por una simetría.

2. Se considera la aplicación f: $\mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_2$ que al punto P de coordenadas (x,y) en un sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ asocia el punto $P' = (x',y')$, donde $x' = 3 + x$ e $y' = -2 + y$.
   a) Demostrar que f es una isometría.
   b) Encontrar, si existen, los puntos fijos de f.
   c) ¿Es la recta $3y + 2x = 18$ globalmente invariante?

4 DESCOMPOSICIÓN DE UNA ISOMETRÍA EN PRODUCTO DE SIMETRÍAS. ISOMETRÍAS POSITIVAS Y NEGATIVAS

4.1. *Toda isometría de $\mathscr{E}_2$ se puede descomponer como producto de $n \leq 3$ simetrías ortogonales axiales.*

Ya hemos visto que si la isometría tiene al menos un punto fijo, entonces se descompone en producto de simetrías (ver **3.3** y **3.4**). Supongamos entonces que f es una isometría que no tiene ningún punto fijo. Sea P un punto arbitrario y $P' = f(P) \neq P$; llamemos s_1 a la simetría respecto de la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$; entonces $s_1 \circ f$ es una isometría que tiene a P como punto fijo, ya que $s_1 \circ f(P) = s_1(P') = P$; por **3.4** se tiene alguno de estos casos:

$$s_1 \circ f = 1 \quad \text{o} \quad s_1 \circ f = s_2 \quad \text{o} \quad s_1 \circ f = s_2 \circ s_3$$

Multiplicando por s_1 y teniendo en cuenta que $s_1^2 = 1$, se tiene:

$$f = s_1, f = s_1 \circ s_2 \quad \text{o bien} \quad f = s_1 \circ s_2 \circ s_3$$

4.2. Toda isometría es una aplicación biyectiva.

En efecto, por **4.1** toda isometría f es producto de simetrías, pero éstas son aplicaciones biyectivas, y por tanto f es biyectiva.

4.3. $\text{Ism}(\mathscr{E}_2)$ con la composición de aplicaciones es un grupo. La demostración se deja como ejercicio.

4.4. Sea f una isometría. Sabemos por **4.2** que f se puede descomponer en producto de simetrías. Esta descomposición no es única; por ejemplo, si s es una simetría, $s = s \circ s \circ s = s \circ s \circ s \circ s \circ s$; sin embargo, se puede demostrar, aunque no lo haremos en este libro, que la paridad del número de simetrías que aparecen en la descomposición

es independiente de ésta. Esto nos conduce a la siguiente definición: *Una isometría se dice positiva si se descompone en un número par de simetrías, y se dice negativa si se descompone en un número impar de simetrías.*

El conjunto de las isometrías positivas se representa por $\mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$, y el de las negativas por $\mathrm{Ism}^-(\mathscr{E}_2)$.

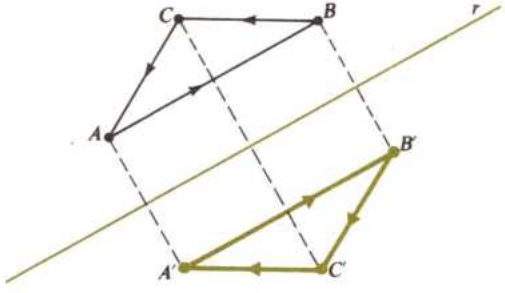
Evidentemente la identidad es positiva, pues $1_{\mathscr{E}_2} = s \circ s$, donde s es cualquier simetría y toda simetría es negativa, pues $s = s \circ s \circ s$.

4.5. Sean f y g dos isometrías; entonces se verifica:

a) Si $f,g \in \mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$, entonces $f \circ g \in \mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$.
b) Si $f,g \in \mathrm{Ism}^-(\mathscr{E}_2)$, entonces $f \circ g \in \mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$.
c) Si $f \in \mathrm{Ism}^-(\mathscr{E}_2)$ y $g \in \mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$, entonces $f \circ g$ y $g \circ f \in \mathrm{Ism}^-(\mathscr{E}_2)$.

Demostremos a): Si $f \in \mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$, entonces $f = s_1 \circ \ldots \circ s_n$ con n par; análogamente, $g = s'_1 \circ \ldots \circ s'_m$ con m par; entonces, $f \circ g = s_1 \circ \ldots \circ s_n \circ s'_1 \circ \ldots \circ s'_m$, esta descomposición consta de $n + m$ simetrías, pero $n + m$ es par, y por tanto, $f \circ g \in \mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_2)$.

4.6. La razón de distinguir entre isometrías positivas y negativas radica en el hecho de que en el plano dos figuras pueden ser iguales sin ser superponibles (sin sacarlas del plano). Consideremos el triángulo $\overset{\frown}{ABC}$ de la figura 7. La figura obtenida del triángulo $\overset{\frown}{ABC}$ por la simetría respecto de la recta r es el triángulo $\overset{\frown}{A'B'C'}$.



(Fig. 7)

Si suponemos un sentido de recorrido del triángulo, como se indica en la figura, entonces un individuo que recorra el triángulo $\overset{\frown}{ABC}$ encuentra el interior del triángulo a su izquierda, mientras que uno que recorra el $\overset{\frown}{A'B'C'}$ lo encuentra a su derecha; es decir, la simetría ha invertido la orientación del triángulo. Es evidente que si aplicamos una nueva simetría al triángulo $\overset{\frown}{A'B'C'}$ obtenemos un triángulo $\overset{\frown}{A''B''C''}$, que tiene distinta orientación del $\overset{\frown}{A'B'C'}$, y por tanto la misma orientación que el $\overset{\frown}{ABC}$; de aquí que al realizar un número impar de simetrías cambiamos la orientación (isometría negativa), mientras que al realizar un número par de simetrías no cambia la orientación (isometría positiva).

Ejercicios:

1. Demostrar la propiedad b) del apartado **4.5.**
2. Demostrar la propiedad c) del apartado **4.5.**

5 CLASIFICACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS DE $\mathscr{E}_2$

Vamos a clasificar las isometrías de $\mathscr{E}_2$ en función de que sean positivas o negativas y según sea el conjunto de sus puntos fijos. Distinguiremos dos casos:

a) *Isometrías positivas.*

a_1) La isometría no tiene puntos fijos. En este caso, por **4.1**, la isometría se descompone en producto de n simetrías con $n \leq 3$. Como la isometría es positiva, n tiene que ser par, luego $n = 2$. Es decir, la isometría es producto de dos simetrías. En este caso la isometría se llama *traslación.*

a_2) La isometría tiene un solo punto fijo O; razonando de forma análoga al caso anterior, debe ser producto de dos simetrías. En este caso, la isometría se llama *giro de centro O.*

a_3) La isometría tiene dos puntos fijos y no es la identidad; entonces sabemos por **3.3** que se trata de una simetría, pero las simetrías son isometrías negativas, luego este caso no puede presentarse.

a_4) La isometría es la identidad.

b) *Isometrías negativas.*

b_1) La isometría no tiene puntos fijos; por **4.1**, la isometría se descompone en producto de n simetrías con $n \leq 3$. Como la isometría es negativa, $n = 1$ o $n = 3$. Pero $n = 1$ no puede suceder, pues entonces la isometría sería una simetría y tendría puntos fijos; por tanto, $n = 3$, y la isometría se descompone en producto de tres simetrías. En este caso, la isometría se llama *simetría con deslizamiento.*

b_2) La isometría tiene puntos fijos; entonces, del razonamiento del caso anterior, $n = 1$, y la isometría es una simetría. Resumiendo:

Conjunto de puntos fijos	Isometrías positivas	Isometrías negativas
$\varnothing$	Traslación: es el producto de dos simetrías.	Simetría deslizamiento es el producto de tres simetrías.
Un punto	Giro: es el producto de dos simetrías.	No hay
Una recta	No hay.	Simetría respecto de dicha recta.
Todo el plano	Identidad.	No hay.

6 TRASLACIONES

6.1. Hemos visto en el apartado anterior que una traslación es el producto de dos simetrías y que no tiene puntos fijos. Vamos a estudiar ahora más detalladamente este tipo de isometrías.

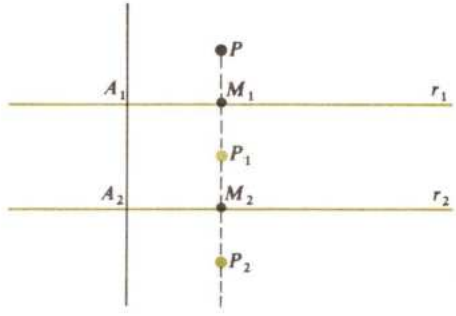
Sea t una traslación y $t = s_1 \circ s_2$ su descomposición en producto de simetrías. Sean r_1 y r_2 los ejes de las simetrías s_1 y s_2, respectivamente.

Las rectas r_1 y r_2 deben ser paralelas, pues si se cortaran en un punto O, entonces como $O \in r_1$ sería $s_1(O) = O$, y como $O \in r_2$ sería $s_2(O) = O$, luego $t(O) = s_1(s_2(O)) = s_1(O) = (O)$ y el punto O sería un punto fijo de t, lo cual es absurdo, pues las traslaciones no tienen puntos fijos.

6.2. *Una aplicación $f: \mathscr{E}_2 \longrightarrow \mathscr{E}_2$ es una traslación si y sólo si existe un vector $\overrightarrow{AB}$, distinto de cero, tal que para todo $P \in \mathscr{E}_2$, $[\overrightarrow{Pf(P)}] = [\overrightarrow{AB}]$.*

Supongamos que f es una isometría y sea $f = s_2 \circ s_1$, donde s_1 y s_2 son simetrías respecto de rectas paralelas r_1 y r_2.

Tracemos una perpendicular arbitraria a r_1 y r_2 y sean A_1 y A_2 los puntos de corte, como se indica en la figura 8.



(Fig. 8)

Sea P un punto de $\mathscr{E}_2$ y P_1 el simétrico respecto de r_1; entonces, $s_1(P) = P_1$.

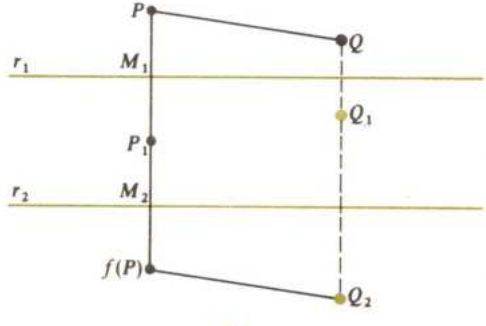
Sea P_2 el simétrico de P_1 respecto de r_2; entonces, $s_2(P_1) = P_2$, luego $f(P) = s_2(s_1(P)) = s_2(P_1) = P_2$. Ahora bien, $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{M_1P_1} + \overrightarrow{P_1M_2} + \overrightarrow{M_2P_2} = 2(\overrightarrow{M_1P_1} + \overrightarrow{P_1M_2}) = 2\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$. Tomando $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$ se tiene $[\overrightarrow{Pf(P)}] = [\overrightarrow{AB}]$.

Recíprocamente, supongamos la existencia de un vector $\overrightarrow{AB}$ tal que para todo $P \in \mathscr{E}_2$, $[\overrightarrow{Pf(P)}] = [\overrightarrow{AB}]$; para ver que f es una traslación vamos a ver que f se descompone en el producto de dos simetrías de ejes paralelos.

Sea P un punto del plano y $f(P)$ su imagen; tracemos una recta r_1 perpendicular al segmento $\overline{Pf(P)}$ en un punto distinto de P y $f(P)$ (Fig. 9).

Sea P_1 el simétrico de P respecto de r_1 y sea r_2 la mediatriz del segmento $\overline{P_1f(P)}$. Sean s_1 y s_2 las simetrías respecto de r_1 y r_2. Vamos a ver que $f = s_2 \circ s_1$.

Sea Q un punto cualquiera del plano, Q_1 el simétrico de Q respecto de r_1 y Q_2 el simétrico de Q_1 respecto de r_2; entonces, $Q_2 = s_2 \circ s_1(Q)$.

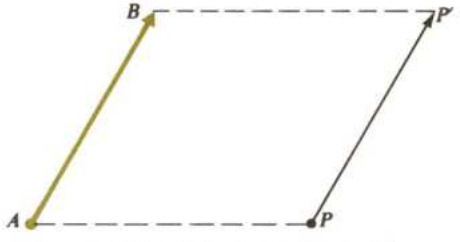


(Fig. 9)

Por hipótesis, $[\overrightarrow{Pf(P)}] = [\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{Qf(Q)}] = [\overrightarrow{AB}]$. Luego $\overrightarrow{Pf(P)}$ es equipolente a $\overrightarrow{Qf(Q)}$, y como $\overrightarrow{Pf(P)} = 2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{QQ_2}$, se sigue que $\overrightarrow{Qf(Q)}$ es equipolente a $\overrightarrow{QQ_2}$; luego $f(Q) = Q_2 = s_2s_1(Q)$, luego $f = s_2 \circ s_1$ y f es una traslación.

Nota. Obsérvese que en esta última parte se ha demostrado implícitamente que toda traslación se descompone en producto de dos simetrías, la primera de las cuales se puede elegir arbitrariamente.

6.3. El vector $\overrightarrow{AB}$ cuya existencia asegura **6.2** se llama el *vector de la traslación*, y obviamente está determinado de forma única (ver ejercicio 1). El teorema **6.2** nos permite dar una caracterización geométrica muy sencilla de las traslaciones. *Una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ es una aplicación del plano en sí mismo que hace corresponder a cada punto P un punto P' tal que PP' es equipolente a AB.* (Figura 10).



$P \to P'$ por la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$

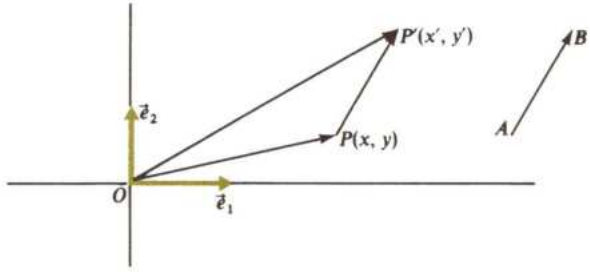
(Fig. 10)

6.4. *El producto de dos traslaciones es una traslación de vector la suma de los vectores de cada una de ellas.*

La demostración la dejamos como ejercicio.

6.5. *Expresión analítica de una traslación.*

Sea $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal y f la traslación del vector $\overrightarrow{AB}$. Supongamos que el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene de componentes (a,b); sea P un punto de coordenadas (x,y), P' su imagen por la traslación f y sean (x',y') sus coordenadas. De la figura 11 se deduce que: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}$.



(Fig. 11)

Pero $\overrightarrow{PP'}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$, luego $\overrightarrow{PP'} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$, de donde $x'e_1 + y'e_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = (x + a)\vec{e}_1 + (y + b)\vec{e}_2$, y de aquí que:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ de componentes a y b.

Ejemplo:

- En un sistema de referencia ortonormal, se considera la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ de componentes $(-1, 2)$.

  a) Hallar las ecuaciones de la traslación del vector $\overrightarrow{AB}$.
  b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto imagen de $P = (1, 3)$?
  c) ¿Qué punto tiene como imagen el $(0, 0)$?
  d) ¿Cuál es la ecuación de la recta transformada de $y = 6x - 1$ por la traslación?

Solución

a) Ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

b) Haciendo en las ecuaciones $x = 1, y = 3$, se tiene $x' = 0, y' = 5$; luego el punto P' imagen de P por la traslación es el $(0, 5)$.

c) Haciendo en las ecuaciones de la traslación $x' = 0$, $y' = 0$ se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 0 = x - 1 \\ 0 = y + 2 \end{cases}$$ de donde $x = 1, y = -2$ y el punto pedido es $(1, -2)$.

d) El punto (x_0, y_0) de la recta se transforma en el $x'_0 = x_0 - 1$, $y'_0 = y_0 + 2$, de donde $x_0 = 1 + x'_0$, $y_0 = y'_0 - 2$. Como $y_0 = 6x_0 - 1$, se tiene $y'_0 - 2 = 6(x'_0 + 1) - 1 = 6x'_0 + 5$.

Luego $y'_0 = 6x'_0 + 7$, y la ecuación de la recta es $y = 6x + 7$.

Ejercicios:

1. Demostrar que el vector de una traslación es único.

2. Demostrar que el producto de dos traslaciones es una traslación cuyo vector es la suma de los vectores de cada una de ellas.

3. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ un sistema de referencia ortogonal de $\mathscr{E}_2$. El punto P de coordenadas $(1, -1)$ se transforma por una traslación en el P' de coordenadas $(2, 4)$. ¿Cuáles son las componentes del vector de la traslación?

4. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ un sistema de referencia ortogonal de $\mathscr{E}_2$. Se considera la traslación de vector $\vec{AB}$, cuyas componentes son $(1, -1)$.

   a) Hallar las ecuaciones de la traslación.
   b) ¿Cuál es la imagen por la traslación del punto $(1, -1)$?
   c) ¿Qué punto tiene por imagen el origen?
   d) ¿Cuál es la imagen por la traslación de la recta $x + y = 8$?
   ¿Y de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$?

5. Una traslación está definida por el par de puntos homólogos $P(2, 5)$ y $P'(-1, 2)$.
   Hallar:

   a) El vector de la traslación y las ecuaciones de ésta.
   b) La recta transformada de r: $2x - 3y - 1 = 0$.

---

7 GIROS

7.1. Hemos visto en el apartado **5** que un giro es una isometría positiva que tiene un único punto fijo O que se llama *centro del giro*. Además, sabemos que un giro se puede descomponer como producto de dos simetrías.

7.2. Si f es un giro de centro O y $f = s_2 \circ s_1$, donde s_2 y s_1 son simetrías, entonces los ejes de las simetrías s_2 y s_1 se cortan en O.

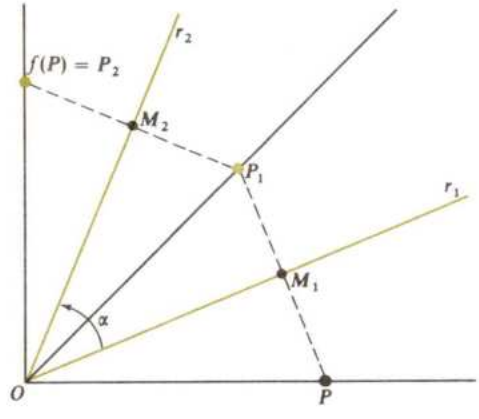
Sean r_1 y r_2 los ejes de s_1 y s_2; si r_1 es paralela a r_2, entonces $f = s_1 \circ s_2$ sería, por **6.1** y **6.2**, una traslación, y f no tendría puntos fijos, en contradicción con que f tiene un punto fijo O.

Sea P el punto de intersección de r_1 y r_2; entonces, como P es un punto de r_1, $s_1(P) = P$ y, análogamente, $s_2(P) = P$, luego $f(P) = s_2(s_1(P)) = P$, luego P es un punto fijo de f. Como f tiene a O como único punto fijo, $P = O$.

7.3. Si f es un giro de centro O, entonces existe un ángulo $\varphi (O < \varphi < 2\pi)$ tal que para todo punto $P \in \mathscr{E}_2$ distinto de O, $\varphi = \widehat{POf(P)}$.

En efecto, sea $f = s_2 \circ s_1$, con s_2, s_1 simetrías de ejes r_2 y r_1. Sea $P \in \mathscr{E}_2$, $P \neq O$ y $P_1 = s_1(P)$ y $P_2 = s_2(P_1)$; entonces, $f(P) = s_2(s_1(P)) = P_2$. Sea α el ángulo orientado que forman r_1 y r_2. En la figura 12 se tiene:

$$\widehat{POf(P)} = \widehat{POP_2} = \widehat{POM_1} + \widehat{M_1OP_1} + \widehat{P_1OM_2} + \widehat{M_2OP_2}$$



(Fig. 12)

Como P_1 es el simétrico de P respecto de r_1, r_1 es la mediatriz del segmento $\overline{PP_1}$, luego $\widehat{POM_1} = \widehat{M_1OP_1}$ y, análogamente, $\widehat{P_1OM_2} = \widehat{M_2OP_2}$, luego $\widehat{POf(P)} = 2(\widehat{M_1OP_1} + \widehat{P_1OM_2}) = 2\alpha$. Tomando $\varphi = 2\alpha$, se sigue el resultado.

El ángulo φ se dice el *ángulo de giro*.

7.4. Un giro de centro O y ángulo φ es la aplicación f del plano $\mathscr{E}_2$ en sí mismo que asocia a cada punto P el punto P' caracterizado por las condiciones:

i) $d(O,P) = d(O,P')$.

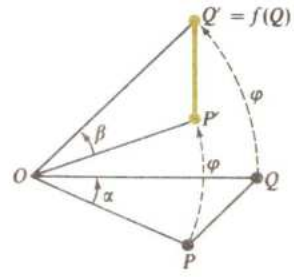
ii) $\widehat{POP'} = \varphi$.

En efecto, tenemos que comprobar:

a) f es una isometría.

b) f tiene un único punto fijo.

a) Consideremos dos puntos P y Q, como se indica en la figura 13, y sean $P' = f(P)$ y $Q' = f(Q)$.



(Fig. 13)

Los triángulos $\widehat{POQ}$ y $\widehat{P'OQ'}$ tienen los lados OP y OQ iguales a los OP' y OQ' por i); por otra parte, los ángulos comprendidos α y β son iguales, ya que:

$$\alpha + \widehat{QOP'} = \varphi = \widehat{QOP'} + \beta, \text{ de donde } \alpha = \beta$$

Resulta entonces que los triángulos son iguales, y por tanto los lados PQ y PQ' tienen la misma longitud, luego $d(P,Q) = d(P',Q')$.

b) El punto O es fijo, ya que $0 = d(O,O) = d(O,O')$, luego $O = O'$ y obviamepte es el único.

7.5. *Todo giro puede descomponerse como producto de dos simetrías respecto de rectas que pasan por el centro del giro, una de las cuales puede elegirse arbitrariamente.*

En efecto, consideremos el giro de centro O y ángulo φ y sean P un punto distinto de O y P' su imagen por el giro; sea r_1 una recta arbitraria que pase por O y distinta de OP y OP'; sea s_1 la simetría respecto de r_1 y P_1 la imagen de P por s_1; sea ahora r_2 la bisectriz del ángulo $\widehat{POP'}$; entonces, si s_2 es la simetría respecto de r_2, entonces $s_2(P_1) = P''$, y el giro es $s_2 \circ s_1$.

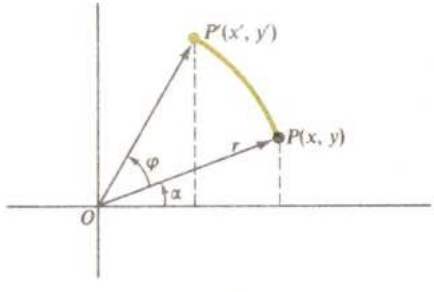
7.6. *El producto de dos giros de centro O y ángulo φ_1 y φ_2 es un giro de centro O y ángulo $\varphi_1 + \varphi_2$.*

La demostración la dejamos como ejercicio.

7.7. *Expresión analítica de los giros*

Sea $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2\}$ un sistema de referencia ortonormal de $\mathscr{E}_2$ y f el giro de centro O y ángulo φ.

Sea $P = (x,y)$ y $P' = (x',y')$ un punto y su transformado por el giro f (Fig. 14).



(Fig. 14)

De la figura 14 se deduce que $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$, y, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, donde $r = \overrightarrow{OP}$ y, análogamente, $\text{sen}(\alpha + \varphi) = \frac{y'}{r}$, y, $\cos(\alpha + \varphi) = \frac{x'}{r}$, ya que $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OP'}|$.

Entonces:

$$x' = r\cos(\alpha + \varphi) = r[\cos\alpha\cos\varphi - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi] = x\cos\varphi - y\,\text{sen}\varphi$$
$$y' = r\,\text{sen}(\alpha + \varphi) = r[\cos\alpha\,\text{sen}\varphi + \text{sen}\alpha\cos\varphi] = x\,\text{sen}\varphi + y\cos\varphi$$

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\,\text{sen}\varphi \\ y' = x\,\text{sen}\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

se llaman las ecuaciones del giro de centro O (origen) y ángulo φ.

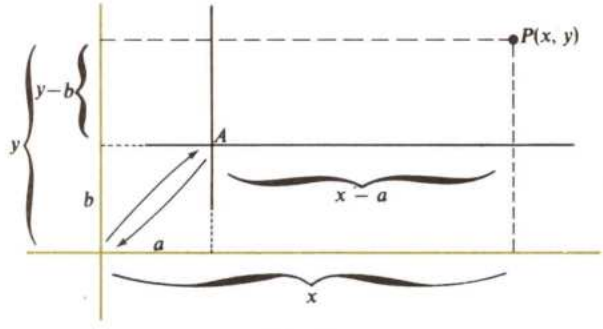
Hemos supuesto que el centro del giro es el origen de coordenadas; si es otro punto $A = (a,b)$, trasladamos los ejes paralelamente al punto A.

Las coordenadas de P en el nuevo sistema de coordenadas serán $(x - a, y - b)$; entonces, aplicando las ecuaciones ya obtenidas:

$$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\varphi - (y - b)\,\text{sen}\varphi \\ y' = (x - a)\,\text{sen}\varphi + (y - b)\cos\varphi \end{cases}$$

y volviendo a cambiar a los ejes primitivos:

$$\begin{cases} x'' = x' + a = (x - a)\cos\varphi - (y - b)\,\text{sen}\varphi + a \\ y'' = y' + b = (x - a)\,\text{sen}\varphi + (y - b)\cos\varphi + b \end{cases} \quad \text{(Fig. 15)}$$



(Fig. 15)

Ejemplos:

- Ecuaciones del giro de centro (1, 1) y ángulo 60° son

$$\begin{cases} x'' = (x - 1)\dfrac{1}{2} - (y - 1)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ y'' = (x - 1)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (y - 1)\dfrac{1}{2} + 1 \end{cases}$$

ya que $\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y, $\cos 60° = \frac{1}{2}$

EJERCICIOS FINALES

1. Demostrar que la inversa de una traslación es una traslación. ¿Cuál es su vector?

2. La identidad puede considerarse como una traslación de tipo particular. ¿En qué forma?

3. Demostrar que dados dos puntos P y Q existe una traslación que transforma P en Q.

4. Encontrar las ecuaciones de la traslación que transforma el punto (1, 1) en el (2, 3).

5. ¿Cuál es la imagen de la recta $3x - y + 8 = 0$ por la traslación del vector $(1, -1)$?

6. ¿Cuáles son las ecuaciones de la simetría respecto de la recta $y = x - 1$?

7. Encontrar dos simetrías s_1, s_2 tales que la traslación f de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

se descomponga como $f = s_2 \circ s_1$.

8. Encontrar dos simetrías $s_1 \circ s_2$ tales que el giro f de centro el origen y ángulo 90° se descomponga en la forma $f = s_2 \circ s_1$.

9. Encontrar dos simetrías s_1 y s_2 tales que el giro f de centro el origen y ángulo 135° se descomponga en la forma $f = s_1 \circ s$, y, $f = s \circ s_1$, donde s es la simetría respecto de la recta $y = x$.

10. Demostrar que el producto de dos giros de distinto centro es un giro o una traslación.

11. Encontrar gráficamente el centro del giro producto de dos giros de centros distintos en el caso de que dicho producto sea efectivamente un giro (ver problema 10).

12. Demostrar que si f es una simetría con deslizamiento, entonces f es el producto de una simetría y una traslación.

13. Demostrar que el producto de una simetría y una traslación es una simetría con deslizamiento.

14. Dadas dos rectas paralelas y un punto exterior a ellas, trazar una recta que pase por dicho punto e intercepte con las dos paralelas un segmento de longitud dada. Discutir los distintos casos que pueden presentarse.

15. En una mesa de billar, encontrar el camino que ha de seguir una bola para hacer carambola si ésta ha de realizarse a dos bandas.

16. Dadas tres rectas paralelas, construir un triángulo equilátero que tenga un vértice sobre cada recta.

17. Demostrar que el inverso de un giro es otro giro. ¿Cuál es su ángulo?

18. El producto de un giro por una traslación ¿es conmutativo?

19. Hallar las ecuaciones del giro cuyo centro es (1, 1) y su ángulo 120°. ¿Cuál es la imagen por dicho giro del punto de coordenadas $(-1, 3)$?

TEMA 11
ISOMETRÍAS EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

En este tema se estudian las isometrías del espacio euclídeo $\mathscr{E}_3$. El tratamiento es esencialmente análogo al realizado en el plano euclídeo; sin embargo, dado que en $\mathscr{E}_3$ existe una mayor complicación, la clasificación de las isometrías según sus puntos fijos y su carácter positivo o negativo se pospone al apartado final y se realiza previamente un estudio particular de ciertas isometrías, que finalmente vienen a resultar todas las posibles, como se demuestra al realizar la clasificación.

1 ISOMETRÍAS

Sea $\mathscr{E}_3$ el espacio euclídeo. Una aplicación $f: \mathscr{E}_3 \to \mathscr{E}_3$ se dice una *isometría* si conserva las distancias, es decir, si para todo par de puntos $P,Q \in \mathscr{E}_3$ se verifica que

$$d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$$

El conjunto de las isometrías de $\mathscr{E}_3$ se representa por $\mathrm{Ism}(\mathscr{E}_3)$.

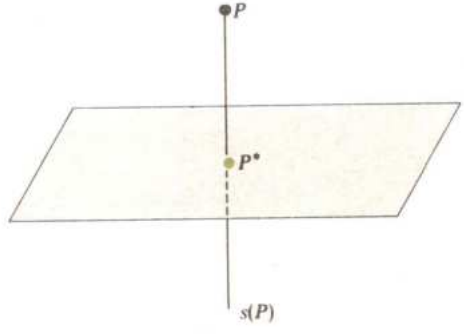
De la misma forma que se demostró en el plano euclídeo, se verifica que:

a) La composición o producto de dos isometrías es una isometría.
b) La identidad es una isometría.

2 SIMETRÍAS ESPECULARES

2.1. Sea π un plano de $\mathscr{E}_3$. Se llama *simetría especular respecto de* π a la aplicación $s: \mathscr{E}_3 \to \mathscr{E}_3$ que a cada punto P de $\mathscr{E}_3$ hace corresponder el punto $s(P)$ construido de la siguiente forma: Por P se traza la recta perpendicular al plano π; sea P^* el punto de intersección de dicha recta y el plano; entonces $s(P)$ es el punto tal que P^* es el punto medio de P y $s(P)$ (Fig. 1).

$s(P)$ se llama el *simétrico de P respecto del plano* π, y dicho plano se llama la *base de la simetría* s o *plano de simetría*.



(Fig. 1)

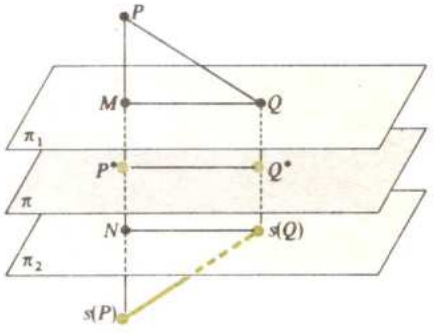
Es evidente que los únicos puntos P tales que $s(P) = P$ son los del plano π. Además, $s \circ s = 1_{\mathscr{E}_3}$, de donde se deduce que s es biyectiva y $s^{-1} = s$.

También resulta, como consecuencia inmediata de la definición, que $s(P)$ es el único punto perteneciente a la perpendicular a π por P cuya distancia a π es la misma que la distancia de P a π.

2.2. Las simetrías especulares son isometrías.

En efecto, sea s la simetría respecto del plano π y sean $P,Q \in \mathscr{E}_3$. Se trata de demostrar que $d(s(P), s(Q)) = d(P,Q)$ (Fig. 2).

Sean π_1 y π_2 los planos paralelos a π por Q y $s(Q)$. Los triángulos $\widehat{PQM}$ y $\widehat{s(P)\,s(Q)N}$ son iguales por tener $\overline{PM} = \overline{s(P)N}$ y $\overline{MQ} = \overline{Ns(Q)}$ y ser rectángulos en M y N; por tanto, sus hipotenusas son iguales, luego $d(P,Q) = \overline{PQ} = \overline{s(P)\,s(Q)} = d(s(P), s(Q))$.



(Fig. 2)

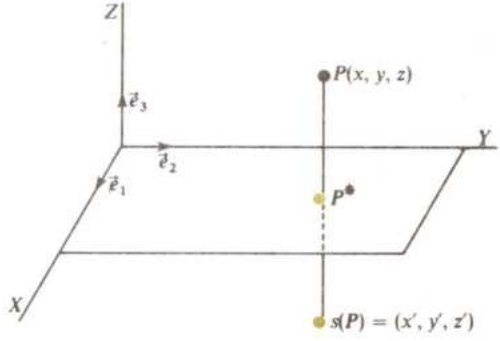
2.3. *Ecuación de una simetría especular.*

Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un sistema de referencia ortonormal de $\mathscr{E}_3$. Vamos a encontrar las ecuaciones de la simetría especular respecto del plano XY (Fig. 3).

Sean (x,y,z) las coordenadas del punto P y (x',y',z') las de su imagen $s(P)$.

La ecuación de la perpendicular al plano XY desde P es

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \end{cases} \quad [1]$$



(Fig. 3)

El punto P^* es el punto de intersección de la recta [1] con el plano XY cuya ecuación es $z = 0$; luego P^* tiene de coordenadas $(x,y,0)$; como P^* es el punto medio de P y $s(P)$, será:

$$\frac{x' + x}{2} = x \; ; \; \frac{y' + y}{2} = y \; ; \; \frac{z' + z}{2} = 0$$

de donde:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la simetría especular respecto del plano XY. Estas ecuaciones se pueden escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que se llaman las *ecuaciones matriciales de la simetría especular respecto del plano XY.*

En caso de que se trate de la simetría respecto de otro plano, el procedimiento es análogo.

Ejemplo:

- Resolver las siguientes cuestiones:

  a) Encontrar las ecuaciones de la simetría especular respecto del plano $X - Y + 5 = 0$.

  b) ¿Cuál es el simétrico del punto (1, 1, 1)?

  a) Sea $P(x,y,z)$ un punto arbitrario de $\mathscr{E}_3$; la perpendicular al plano $X - Y + 5 = 0$ que pasa por (x,y,z) es:

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{-1} = \frac{Z - z}{0}$$

  o también:

$$\begin{cases} X + Y = x + y \\ Z = z \end{cases}$$

  El punto P^* de intersección de esta recta con el plano $X - Y + 5 = 0$ se obtendrá resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} X + Y = x + y \\ Z = z \\ X - Y = -5 \end{cases}$$

  de donde $P^* = \left(\frac{x + y - 5}{2}, \frac{x + y + 5}{2}, z\right)$; si $P' = (x',y',z')$ son las coordenadas del simétrico de P se tendrá:

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{x + y - 5}{2}, \quad \frac{y + y'}{2} = \frac{x + y + 5}{2}, \quad \frac{z + z'}{2} = z$$

  de donde $x' = y - 5$, $y' = x + 5$, $z' = z$

  Luego $\begin{cases} x' = y - 5 \\ y' = x + 5 \\ z' = z \end{cases}$ son las ecuaciones de la simetría.

  Matricialmente podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  b) El simétrico del punto (1, 1, 1) se tendrá sustituyendo en las ecuaciones de la simetría las coordenadas del punto $x' = -4$, $y' = 6$, $z' = 1$

  Luego el simétrico de (1, 1, 1) es (−4, 6, 1).

Ejercicios:

1. Encontrar el simétrico del punto (1, −1, 1) respecto del plano de ecuación $x = 0$.

2. Encontrar las ecuaciones de la simetría especular respecto del plano de ecuación $x + y + z = 1$.

3. La simetría especular respecto de un plano transforma el punto (1, 2, 0) en (5, 6, 8). ¿Cuál es la ecuación del plano?

---

3 PUNTOS FIJOS DE UNA ISOMETRÍA

3.1. Sea f una isometría de $\mathscr{E}_3$. Un punto $P \in \mathscr{E}_3$ se dice un *punto fijo de* f si $f(P) = P$.

3.2. *Si una isometría tiene cuatro puntos fijos que no están en un mismo plano, entonces es la identidad.*

Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos que no son coplanarios (es decir, no están en el mismo plano) y que sean puntos fijos de una isometría f. Si f no es la identidad, existirá un punto Q tal que $f(Q) \neq Q$.

Sea π el plano mediatriz del segmento $\overline{Qf(Q)}$. Como $d(P_1,Q) = d(f(P_1),f(Q)) = d(P_1,f(Q))$, resulta que $P_1 \in \pi$. De forma análoga, $P_2,P_3,P_4 \in \pi$, y esto es una contradicción con el hecho de que los puntos P_1,P_2,P_3,P_4 no son coplanarios. Luego $f = 1_{\mathscr{E}_3}$.

3.3. *Si una isometría tiene al menos tres puntos fijos no alineados, entonces o bien es la identidad o la simetría especular respecto del plano determinado por dichos puntos.*

Supongamos P_1, P_2 y P_3 tres puntos de la isometría f. Si $f = 1_{\mathscr{E}_3}$, ya está demostrado. Supongamos entonces $f \neq 1_{\mathscr{E}_3}$ y sea Q un punto no perteneciente al plano π determinado por P_1,P_2,P_3; entonces, $f(Q) \neq Q$, pues si $f(Q) = Q$, f tendría cuatro puntos fijos no coplanarios, y por **3.2** $f = 1_{\mathscr{E}_3}$, caso que hemos supuesto que no se da.

Sea entonces $Q' = f(Q) \neq Q$ y sea π el plano mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$; entonces, razonando de modo análogo a **3.2**, resulta que P_1,P_2,P_3 pertenecen a π, pero entonces f es la simetría respecto del mismo plano π, determinado por P_1,P_2,P_3.

3.4. Toda isometría que tiene al menos dos puntos fijos es de uno de los siguientes tipos:

a) *La identidad.*
b) *Una simetría especular.*
c) *El producto de dos simetrías especulares.*

Sean f una isometría y P_1 y P_2 dos puntos fijos; si $f = 1_{\mathscr{E}_3}$ ya está demostrado. Si f es una simetría especular, ya está demostrado. Si no se verifican estos casos entonces debe existir un punto Q no alineado con P_1 y P_2 tal que $f(Q) \neq Q$. Sea s_1 la simetría especular respecto del plano π mediatriz del segmento $\overline{f(Q)Q}$; entonces, $s_1 \circ f$ es una simetría y $s_1 f(P_1) = s_1(P_1) = P_1$, ya que $P_1 \in \pi$, por ser P_2 fijo (ver **3.2**). $s_1 f(P_2) = s_1(P_2) = P_2$, ya que $P_2 \in \pi$, por ser P_2 fijo. $s_1 f(Q) = Q$, pues $s_1(Q) = f(Q)$ y $s_1^2 = 1_{\mathscr{E}_3}$.

Entonces, $s_1 \circ f$ tiene al menos tres puntos fijos, y por tanto, o bien $s_1 \circ f = 1_{\mathscr{E}_3}$ o $s_1 \circ f = s_2$ (por **3.3**), como $s_1 \circ f = 1_{\mathscr{E}_3}$ implica $f = s_1$, y este caso ya lo hemos eliminado, será $s_1 \circ f = s_2$; luego $f = s_1 \circ s_2$.

3.5. Toda isometría que tiene al menos un punto fijo es de uno de los siguientes tipos:

a) *La identidad.*
b) *Una simetría especular.*
c) *El producto de dos simetrías especulares.*
d) *El producto de tres simetrías especulares.*

La demostración es análoga a la de **3.4** y queda como ejercicio.

4 DESCOMPOSICIÓN DE UNA ISOMETRÍA EN PRODUCTO. ISOMETRÍAS POSITIVAS Y NEGATIVAS

4.1. *Toda isometría de $\mathscr{E}_3$ se puede descomponer como producto de $n \leq 4$ simetrías especulares.*

Se ha visto en el apartado anterior que si la isometría tiene al menos un punto fijo, se descompone en producto de simetrías especulares. El único caso que queda por estudiar es el de una isometría que no tenga puntos fijos. Sea f una tal isometría y sea Q un punto arbitrario de $\mathscr{E}_3$; entonces, $Q' = f(Q) \neq Q$.

Sea s_1 la simetría especular respecto del plano π, plano mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$; entonces la isometría $s_1 \circ f$ tiene el punto Q fijo, ya que: $s_1 f(Q) = s_1(Q') = Q$.

Por tanto, por lo estudiado en el apartado anterior:

$$s_1 \circ f = 1,\ s_1 \circ f = s_2,\ s_1 \circ f = s_2 \cdot s_3 \text{ ó } s_1 \circ f = s_2 \circ s_3 \circ s_4$$

luego $f = s_1,\ f = s_1 \circ s_2,\ f = s_1 \circ s_2 \circ s_3,\ f = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4$

4.2. *Toda isometría es una aplicación biyectiva.* En efecto, por **3.5**, la isometría es producto de simetrías especulares que son biyectivas; por tanto, es biyectiva.

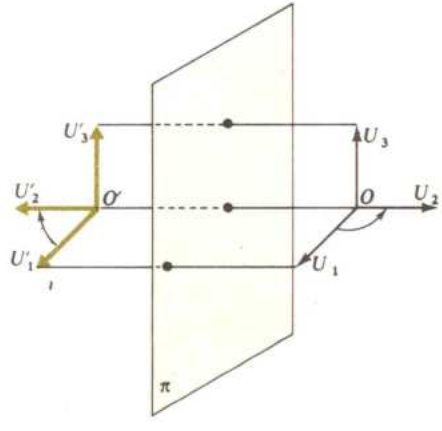
4.3. Una isometría se dice *positiva* si es el producto de un número par de simetrías especulares, y se dice negativa si es el producto de un número impar de simetrías especulares.

El conjunto de las isometrías positivas se representa por $\mathrm{Ism}^+(\mathscr{E}_3)$, y el de las negativas, por $\mathrm{Ism}^-(\mathscr{E}_3)$.

Como sucedía en el plano, para que la definición de isometrías positivas o negativas tenga sentido debemos admitir, sin demostrar, que la paridad del número de simetrías especulares que aparecen en la descomposición de una isometría no depende de dicha descomposición.

4.4. La razón de distinguir entre isometrías positivas y negativas radica en que en el espacio hay dos posibles orientaciones. Consideremos el triedro $OU_1U_2U_3$ de la figura 4 y el transformado $O'U_1'U_2'U_3'$ mediante la simetría respecto del plano π.

Un observador situado en O que gire en el sentido U_1U_2 realiza este giro en el sentido contrario a las agujas de un reloj, mientras que un observador en O' que vaya de U_1' a U_2' lo hace en el sentido de las agujas de un reloj, es decir, la simetría cambia la orientación; entonces, obviamente un número par de simetrías conservará la orientación, mientras que un número impar la cambiará.



(Fig. 4)

Ejercicios:

1. Demostrar que las isometrías de $\mathscr{E}_3$ con el producto forman un grupo.
2. Demostrar que las isometrías positivas de $\mathscr{E}_3$ forman con el producto un grupo.
3. Las isometrías negativas con el producto ¿forman grupo?
4. Demostrar que el producto de dos isometrías del mismo signo es una isometría positiva y que el producto de dos isometrías de distinto signo es una isometría negativa.

5 ALGUNAS ISOMETRÍAS PARTICULARES DE $\mathscr{E}_3$

5.1. *Traslaciones.*

Sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbf{V}^3$. Se llama *traslación del vector* $\vec{v}$ a la aplicación $t_{\vec{v}}: \mathscr{E}_3 \to \mathscr{E}_3$ que asocia a cada punto P el único punto P' tal que $PP' = \vec{v}$ (Fig. 5).

(Fig. 5)

Si $\vec{v}$ es el vector nulo, entonces

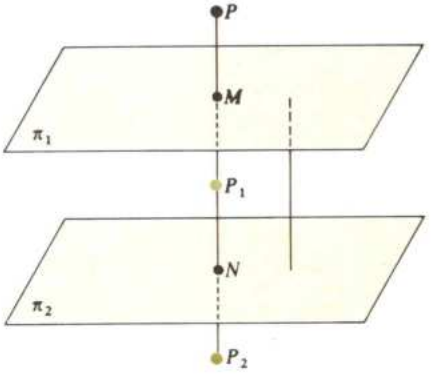
$$P = P' = t_{\vec{0}}(P),$$

y por tanto t_0 es la identidad.

Si $\vec{v}$ es distinto del vector cero, entonces $t_{\vec{v}}$ no tiene ningún punto fijo; en efecto, si P fuese fijo deberían ser $t_{\vec{v}}(P) = P$; entonces, $\overrightarrow{PP} = \vec{v}$, pero $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$, luego $\vec{v} = \vec{0}$, que contradice el hecho de ser $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Producto de simetrías de planos paralelos.

El producto de dos simetrías especulares respecto de planos paralelos es una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia entre los planos, dirección perpendicular a dichos planos y sentido del primero al segundo.



(Fig. 6)

En efecto, supongamos s_1 la simetría especular respecto del plano π_1 y s_2 la simetría especular respecto de π_2; podemos, trivialmente, suponer $\pi_1 \neq \beta_2$. ¿Por qué?

Sea P_1 la imagen de P por s_1 y P_2 la imagen de P_1 por s_2 (Fig. 6).

Sean M y N los puntos de intersección de la perpendicular a los planos por P; entonces:

$$\overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_1N} + \overrightarrow{NP_2}$$

Como $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP_1}$ y $\overrightarrow{P_1N} = \overrightarrow{NP_2}$, resulta:

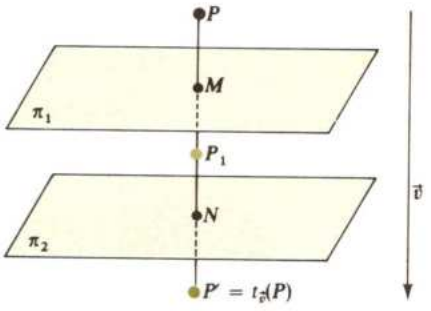
$\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{MP_1} + 2\overrightarrow{P_1N} = 2(\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_1N}) = 2\overrightarrow{MN}$ como queríamos demostrar.

Recíprocamente, toda traslación se puede descomponer en el producto de dos simetrías especulares, pudiendo elegirse la primera arbitrariamente.

Sea la traslación $t_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$ y sea $P' = t_{\vec{v}}(P)$ (Fig. 7).

Elijamos un punto arbitrario M en la recta determinada por P y P'. Sea s_1 la simetría especular respecto del plano π_1, perpendicular a la recta $\overline{PP'}$ por M, y sea P_1 la imagen de P por s_1. Sea N el punto medio del segmento $\overline{P_1P'}$ y s_2 la simetría especular respecto del plano π_2, perpendicular a la recta PP' por N; entonces es inmediato comprobar que $t_{\vec{v}} = s_2 \circ s_1$.

De lo anterior se deduce que toda traslación es una isometría positiva.



(Fig. 7)

Ecuaciones de la traslación.

Sean $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia ortogonal, $\vec{v}$ un vector de componentes (a,b,c) y $t_{\vec{v}}$ la traslación de vector $\vec{v}$.

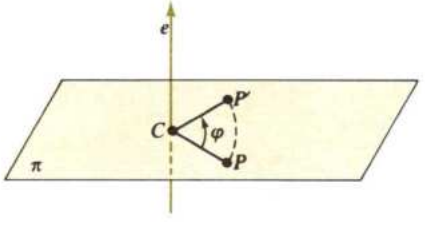
Sea P un punto de coordenadas (x,y,z), P' la imagen de P por t_v y (x',y',z') sus coordenadas; entonces, de $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ se deduce que $(a,b,c) = (x'-x, y'-y, z'-z)$, de donde:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$ que son las ecuaciones de la traslación $t_{\vec{v}}$.

5.2. *Giros.*

Sea e una recta orientada, es decir, con un sentido de recorrido fijado, y φ un ángulo. Se llama *giro de eje e y ángulo* φ a la aplicación $f: \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ que asocia a cada punto P el punto P' obtenido de la siguiente forma:

Se traza por P el plano π perpendicular a la recta e. Si C es el punto de intersección de π y e, entonces P' es la imagen en el plano π del giro de centro C y ángulo φ en el sentido de que, al girar un sacacorchos, al ir de P a P', el avance del sacacorchos coincida con el sentido fijado sobre el eje e (regla del sacacorchos) (Fig. 8).

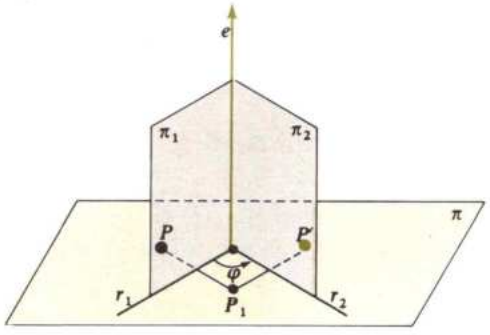


(Fig. 8)

Producto de simetrías de planos que se cortan.

El producto de dos simetrías especulares respecto de dos planos que se cortan es un giro de eje la recta de intersección de ambos planos y ángulo el doble del ángulo formado por dichos planos en el sentido del primero al segundo.

Consideremos las simetrías especulares s_1 y s_2 respecto de los planos π_1 y π_2 que se cortan en la recta e (Fig. 9).

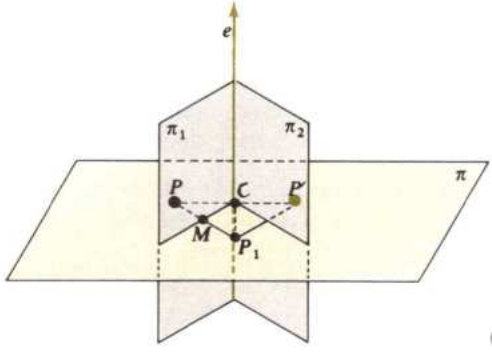


(Fig. 9)

Sean P un punto y P_1 su imagen por la simetría s_1, y P' la imagen de P_1 por s_2. En el plano π, determinado por P, P_1 y P', el paso de P a P' representa la composición de dos simetrías axiales respecto de r_1 y r_2. El resultado es consecuencia del apartado **7.3** del tema 10.

Recíprocamente, todo giro de eje e es el producto de dos simetrías especulares respecto de planos que pasan por e.

En efecto. Consideremos el giro de eje e y ángulo φ; sea π_1 un plano arbitrario que contiene a e (Fig. 10).



(Fig. 10)

Sea P un punto y π el plano perpendicular a π_1 por P, y sea s_1 la simetría especular respecto de π_1 y P_1 el transformado de P por s_1. De la figura se observa que $\widehat{PCM} = \widehat{MCP}$.

Si π_2 es el plano bisector del ángulo $\widehat{P_1CP'}$ y s_2 es la simetría especular respecto de π_2, entonces, trivialmente, $s_2 \circ s_1$ es el giro de eje e y ángulo $\widehat{\pi_1\pi_2}$.

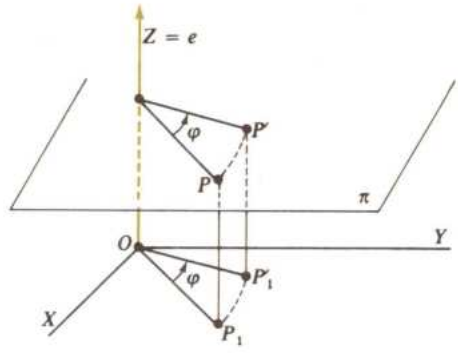
De lo anterior se deduce que un giro es una isometría positiva. Sin embargo, al contrario que las traslaciones, un giro tiene una recta de puntos fijos al eje de giro.

Ecuaciones del giro.

Supongamos el giro de eje e y ángulo φ. Eligiendo un sistema de referencia ortogonal de forma que el eje Z coincida con el eje de giro se observa de la figura 11 y de las fórmulas de giro en el plano:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\varphi \\ y' = x\,\mathrm{sen}\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

que son las ecuaciones del giro de eje Z y ángulo φ.



(Fig. 11)

En el caso particular de que el ángulo de giro es π, entonces el giro se llama una *simetría axial*, y esta isometría es análoga a la simetría axial del plano.

Simetría central

Sea O un punto del plano. Se llama *simetría central respecto de* O a la transformación que asocia a cada punto P el punto P' tal que $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$.

Evidentemente la simetría central respecto de O tiene un único punto fijo, O, y es una isometría negativa (ver ejercicio 9 de este apartado).

Si se elige como punto O el origen de coordenadas, las ecuaciones de la simetría central son: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$

5.3. *Movimiento helicoidal*

Sea e una recta y $\vec{v}$ un vector paralelo a dicha recta. Se llama *movimiento helicoidal de eje e y vector* $\vec{v}$ al producto (composición) de un giro g de eje e y una traslación de vector $\vec{v}$ (obsérvese que el vector debe ser paralelo al eje).

Se puede demostrar (ver ejercicio 14) que en este caso el producto es conmutativo, es decir, si g es un giro de eje e, entonces $g \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ g$.

De la definición se sigue que todo movimiento helicoidal es una isometría positiva.

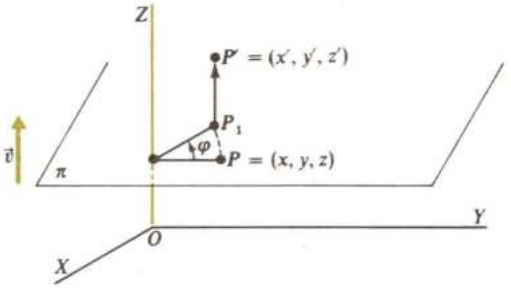
Si $\vec{v} = \vec{0}$, entonces el movimiento helicoidal se reduce a un giro. Si, por otra parte, el giro es de ángulo un múltiplo de 2π, entonces el movimiento helicoidal se reduce a una traslación. En cualquier otro caso el movimiento helicoidal se dice propio.

El movimiento helicoidal es el que realiza un tornillo al girar en su rosca.

Tomemos un sistema de referencia cuyo eje Z coincide con el eje del movimiento. Si el ángulo de giro es φ y el vector de la traslación es $(0, 0, a)$, entonces las ecuaciones del movimiento helicoidal serán $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\varphi \\ y' = x\,\mathrm{sen}\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z + a \end{cases}$

como se deduce fácilmente de la figura 12 de la página siguiente.

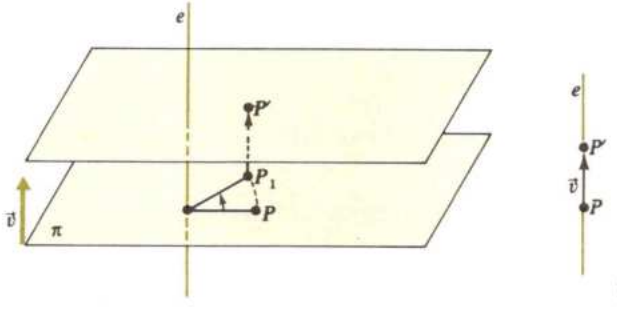
En efecto, al realizar el giro de eje Z y ángulo φ las coordenadas del transformado de P son, como ya hemos visto, $(x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\varphi,\ x\,\mathrm{sen}\varphi + y\cos\varphi,\ z)$. Al realizar ahora la traslación las coordenadas de P' serán $(x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\varphi,\ x\,\mathrm{sen}\varphi + \cos\varphi,\ z + a)$.



(Fig. 12)

Un movimiento helicoidal propio (es decir, distinto de un giro o una traslación) no tiene puntos fijos.

En efecto, sea g el giro del movimiento helicoidal, e el eje y $\vec{v}$ el vector de la traslación. Si el punto P no pertenece al eje, su transformado P_1 por el giro se encuentra en el plano π perpendicular a e por P_1, y al aplicar a P_1 la traslación $t_{\vec{v}}$, el transformado P' (transformado de P por el movimiento helicoidal) se encontrará en el plano paralelo a π a distancia $|\vec{v}|$. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, este plano no puede ser π, y por tanto, $P' \neq P$; si el punto está en el eje, queda fijo por el giro, y al aplicarle t_v se transformará en un punto distinto (Fig. 13).



(Fig. 13)

5.4. *Simetrías de rotación y con deslizamiento.*

Se llama *simetría de rotación* al producto de una simetría central de centro C y un giro cuyo eje pasa por C. Dado que una simetría central es una isometría negativa y un giro es una isometría positiva, resulta que una simetría de rotación es una isometría negativa.

Este producto es conmutativo. Si el ángulo del giro es un múltiplo de 2π, la simetría de rotación se reduce a la simetría central respecto de C. Evidentemente, el único punto fijo es C.

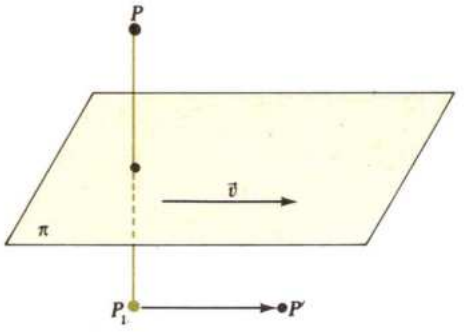
Si elegimos un sistema de referencia ortonormal de forma que el origen sea el centro de la simetría central y el eje Z sea el eje de giro, las ecuaciones de la simetría de rotación de ángulo φ resultan:

$$\begin{cases} x' = -x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\varphi \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\varphi - y\cos\varphi \\ z' = -z \end{cases}$$

Se llama *simetría con deslizamiento* al producto (conmutativo) de una simetría especular s de plano π por una traslación $t_{\vec{v}}$ de vector paralelo a π (Fig. 14).

Evidentemente una simetría con deslizamiento es una isometría negativa sin puntos fijos (ver ejercicio 15 de este apartado).

Las ecuaciones de las simetrías con deslizamiento se pueden obtener cambiando las de las simetrías especulares y las de la traslación.



(Fig. 14)

Ejemplo:

- Vamos a encontrar las ecuaciones de la simetría con deslizamiento respecto del plano XY y de vector $\vec{v}$ $(a,b,0)$.

  La simetría con desplazamiento es la composición $t_{\vec{v}} \circ s_{xy}$. Sea P un punto de coordenadas (x,y,z); entonces, de **2.3** se sigue que las coordenadas de $s_{xy}(P)$ son $(x,y,-z)$ y las de $t_{\vec{v}}(s_{xy}(P))$ serán $(x+a,y+b,-z)$.

  Luego si $P'(x',y',z')$ es el transformado de P por la simetría con desplazamiento $t_{\vec{v}} \circ s_{xy}$ se tiene:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = -z \end{cases}$$

Ejercicios:

1. Demostrar que una traslación transforma rectas en rectas paralelas y planos en planos paralelos.

2. Sea $t_{\vec{v}}$ una traslación. ¿Existe alguna recta r tal que su imagen por dicha traslación sea ella misma? ¿Y planos?

3. Una traslación transforma un punto de coordenadas $(1, 2, -3)$ en el de coordenadas $(0, 1, 1)$. Encontrar el vector de la traslación.

4. ¿Cuál es la ecuación del plano transformado del $x + y - 2z + 3 = 0$ por la traslación de vector $(-1, 1, 0)$?

5. Demostrar que el producto de dos traslaciones es una traslación y es conmutativo.

6. Descomponer la traslación de vector $\vec{v} = (2, 4, 0)$ en producto de dos simetrías especulares $s_2 \circ s_1$, siendo s_1 la simetría especular respecto del plano $-2x + y + 3z = 0$.

7. Encontrar las ecuaciones del giro de ángulo 45° respecto de la recta de ecuación $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ orientada en el mismo sentido que el eje Z.

8. Encontrar las ecuaciones de la simetría central de centro $C(1, 2, -1)$.

9. Demostrar que una simetría central es una isometría negativa.

10. Encontrar las ecuaciones del movimiento helicoidal alrededor del eje Z, ángulo $30°$ y traslación del vector $(0, 0, -1)$. ¿Cuál es la imagen por dicho movimiento del plano $x + y - z = 1$?

11. Hallar las ecuaciones del movimiento helicoidal de eje la recta $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, ángulo $45°$ y traslación de vector $(0, 0, 4)$.

12. Demostrar que el producto de dos simetrías axiales respecto de dos rectas que se cruzan es un movimiento helicoidal. Caracterizar los elementos de éste.

13. Demostrar que la composición de dos movimientos helicoidales es otro movimiento helicoidal.

14. Demostrar que el producto de un giro por una traslación de vector paralelo al eje es conmutativo.

15. Demostrar que una simetría con deslizamiento es una isometría negativa sin puntos fijos.

16. Demostrar que el producto de una simetría especular y una traslación de vector paralelo al plano de la simetría es conmutativo.

17. Encontrar las ecuaciones de la simetría con desplazamiento respecto del plano π de ecuación $x - y + z = 1$ y traslación de vector $(2, -3, -5)$.

6 CLASIFICACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS DE $\mathscr{E}_3$

En este apartado vamos a clasificar las isometrías del espacio euclídeo en función del conjunto de sus puntos fijos y de su carácter positivo o negativo.

a) *Isometrías positivas.*

Veamos previamente un resultado relativo a isometrías del plano.

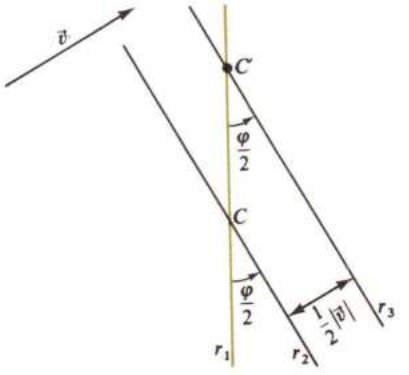
6.1. En el plano euclídeo $\mathscr{E}_2$ el producto $t_{\vec{v}} \circ g$ de una traslación $t_{\vec{v}}$ y un giro g de centro C y un ángulo φ es un giro de ángulo φ.

Sea r_2 la recta que pasa por C y perpendicular a $\vec{v}$ y r_3 la recta paralela a r_2 a distancia $\frac{1}{2}|\vec{v}|$ de r_1 en el sentido de $\vec{v}$ (Fig. 15).

Sea r_2 la recta que pasa por C y forma con r_2 un ángulo $\frac{\varphi}{2}$.

Si s_1, s_2 y s_3 son las simetrías axiales respecto de r_1, r_2 y r_3, respectivamente, se tiene:

$$t_{\vec{v}} = s_3 \circ s_2, \qquad g = s_2 \circ s_1$$



(Fig. 15)

de donde $t_{\vec{v}} \circ g = s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s_1$, que es un giro de centro C' y ángulo $2\frac{\varphi}{2} = \varphi$.

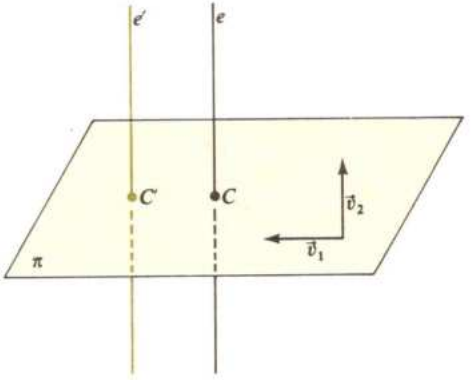
6.2. En el espacio euclídeo $\mathscr{E}_3$, el producto $t_{\vec{v}} \circ g$ de un giro por una traslación es un movimiento helicoidal.

Descompongamos el vector $\vec{v}$ como suma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, donde $\vec{v}_2$ es paralelo al eje e del giro y $\vec{v}_1$ es perpendicular a dicho eje; entonces:

$$t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1}$$

Veamos que $t_{\vec{v}_1} \circ g$ es un giro de eje paralelo a e (Fig. 16).

Sea π un plano perpendicular a e. En π la isometría se reduce a una isometría plana producto de un giro (de centro el punto C de intersección de e y π y ángulo el de g) por una traslación t.



(Fig. 16)

b) *Isometrías negativas.*

Sea f una isometría negativa. Por **4.1**, f es una simetría especular (y por lo tanto tiene un plano de puntos fijos) es el producto de tres simetrías especulares. Además, por **3.4**, f tiene a lo sumo un punto fijo.

Supongamos que $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$ y sean π_3, π_2, π_1 los planos de las simetrías s_3, s_2, s_1, respectivamente.

i) Si f tiene un punto fijo, entonces π_3, π_2 y π_1 se cortan en P. Sea s_p la simetría central respecto de P; entonces, $s_p \circ f$ es par y deja fijo a C, luego $s_p \circ f$ es un giro, por **5.4**. Luego $s_p \circ f = g$, y por tanto, $f = s_p \circ g$, y f es una simetría de rotación.

ii) f no tiene ningún punto fijo; en este caso, π_3, π_2, π_1 no tienen puntos comunes y debe existir una recta r paralela a dichos planos (ejercicio final 12). Sea un plano perpendicular a r en f, f induce una isometría plana negativa y sin puntos fijos. Por **5** del tema 10 debe ser una simetría con deslizamiento, y por tanto f es una simetría con desplazamiento.

Podemos resumir los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

Conjunto puntos fijos	Isometría positiva	Isometría negativa
$\varnothing$	Movimiento helicoidal (propio) o traslación.	Simetría con desplazamiento
Un punto	No hay	Simetría de rotación
Una recta	Giro	No hay
Un plano	No hay	Simetría especular
Todo el espacio	Identidad	No hay

EJERCICIOS FINALES

1. Encontrar las ecuaciones de la simetría especular respecto del plano $x - y + 2z - 8 = 0$. ¿Cuál es la imagen del punto $(1, 1, -1)$? ¿Cuál es la transformada de la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \quad t \\ z = 2 - t \end{cases} ?$$

2. Una aplicación f de $\mathscr{E}_3$ en $\mathscr{E}_3$ viene definida respecto de un sistema de referencia ortonormal por $f(x,y,z) = (-x,y,-z)$. Demostrar que es una isometría y hallar el conjunto de sus puntos fijos.

3. El mismo problema si f viene definida por $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y,\ z + 5\right)$.

4. Descomponer la traslación de vector $(1, -1, 2)$ en producto de dos traslaciones, una de vector paralelo a la recta $\begin{cases} x = \quad 2t \\ y = 1 + t \\ z = \quad -t \end{cases}$ y otra de vector perpendicular a dicha recta.

5. Demostrar que el producto de dos giros cuyos ejes se cortan en P es un giro cuyo eje pasa por P.

6. ¿Es conmutativo el producto de dos giros cuyos ejes pasan por un punto P?

7. Demostrar que el producto de dos giros de ejes paralelos y ángulos φ_1 y φ_2 tales que $\varphi_1 \neq -\varphi_2$ es un giro de eje paralelo a los dados y ángulos $\varphi_1 + \varphi_2$.

8. Con respecto al ejercicio anterior, ¿qué sucede si $\varphi_1 = -\varphi_2$?

9. Demostrar que el producto de dos giros cuyos ejes se cruzan es un movimiento helicoidal propio.

10. ¿Qué movimiento es el producto de tres simetrías especulares respecto de planos que se cortan por una recta r?

11. Demostrar que si una isometría no es la identidad y deja fijos todos los puntos de un plano, es una simetría especular.

12. Demostrar que si π_1, π_2, π_3 son tres planos que no tienen puntos comunes, entonces existe una recta r paralela a dichos planos.

13. Demostrar que el producto de una simetría especular y una axial respecto de una recta contenida en el plano de la especular es una simetría especular.

14. Demostrar que toda isometría negativa es el producto de una simetría especular y una axial.

15. Dado el plano de ecuación cartesiana: $x + 2y + 2z - 5 = 0$, hallar:
    a) Ecuaciones de la simetría respecto del plano dado.
    b) Punto simétrico del $P(-1, 2, 3)$ respecto del plano dado.
    c) Plano simétrico del que tiene por ecuación: $x + y - 3 = 0$.

TEMA 12 CURVAS Y SUPERFICIES

En este tema se aborda el estudio de las curvas planas y de las curvas y superficies en el espacio.

Dado que tal estudio en profundidad exige conocimientos que sobrepasan el nivel del curso, nos hemos limitado al estudio de los tipos más sencillos de curvas y superficies (superficies cónicas, cilíndricas, etc.).

Con frecuencia, las coordenadas cartesianas no son las ideales para abordar un problema geométrico, lo que exige coordenatizar el plano o el espacio mediante otros métodos, los más importantes de los cuales (coordenadas polares, cilíndricas y esféricas) son expuestos en este tema.

1 CURVAS EN EL PLANO

Consideremos en el plano un sistema de referencia ortogonal $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

De cursos anteriores se sabe que la ecuación de una recta viene dada por la fórmula $ax + by + c = 0$; esto quiere decir que un punto P de coordenadas (x_0,y_0) pertenece a la recta si y solamente si las coordenadas (x_0,y_0) del punto verifican la ecuación, esto es, $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia de radio r y centro el origen de coordenadas viene dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

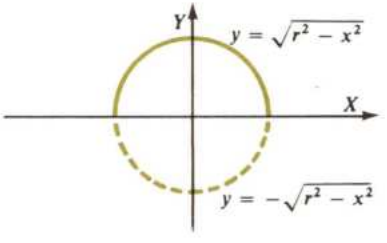
En general, una curva en el plano es el conjunto de puntos cuyas coordenadas verifican una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$.

La ecuación $F(x,y) = 0$ se denomina la *ecuación implícita de la curva.*

Si la variable y puede despejarse, entonces $y = f(x)$ se llama la *ecuación explícita* de la curva.

Por ejemplo: la recta que pasa por los puntos (1, 2) y (3, −1) tiene por ecuación implícita $3x + 2y - 7 = 0$; despejando la variable y, se tiene la ecuación explícita de dicha recta: $y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

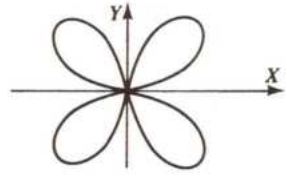
No siempre es fácil ni posible pasar de la ecuación implícita a la explícita, y en todo caso debe comprobarse que las dos ecuaciones definen el mismo conjunto de puntos; por ejemplo, en el caso de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, si despejamos y, obtenemos $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, pero esta ecuación no define *toda* la circunferencia, sino la semicircunferencia indicada en la figura 1.



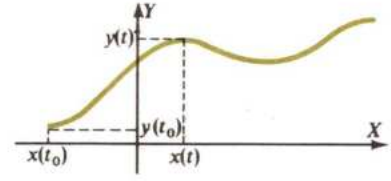
(Fig. 1)

La otra semicircunferencia viene dada por la ecuación $y = -\sqrt{r^2-x^2}$.

En este caso, el problema puede resolverse escribiendo $y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$ (cometiendo una pequeña incorrección de notación, ya que esta última relación no define una función, pues a cada valor de x comprendido entre $-r$ y r corresponden dos valores de y). Sin embargo, en otros casos, como el de la curva $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2 = 0$, cuya gráfica es la de la figura 2, no es posible el paso de la forma implícita a la explícita.



(Fig. 2)



(Fig. 3)

Desde el punto de vista físico, una curva en el plano puede considerarse como el lugar de las posiciones que ocupa un punto móvil al moverse en un plano. En este caso podemos determinar la trayectoria de dicho móvil si en cada instante t del movimiento conocemos la abscisa $x(t)$ y la ordenada $y(t)$ del punto (Fig. 3).

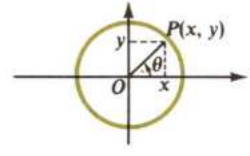
Resulta entonces que una curva puede considerarse como el lugar de los puntos P del plano cuyas coordenadas verifican las ecuaciones

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

donde f y g son funciones continuas de la variable t. Cuando la curva viene definida de esta forma, se dice que está expresada en *forma paramétrica*, y la variable t se dice el *parámetro*. En las aplicaciones físicas normalmente el parámetro es el tiempo, pero, en general, puede tomarse otro parámetro, por ejemplo un ángulo, la distancia a un punto fijo, etc.

Ejemplos:

- Consideremos la circunferencia de centro el origen y radio r (Fig. 4).



(Fig. 4)

Las coordenadas x e y de un punto de la circunferencia vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

donde θ es el ángulo formado por OP y la parte positiva del eje X. En este caso, cuando θ varía entre 0 y 2π ($0 \leq \theta < 2\pi$), obtenemos todos los puntos de la circunferencia y ninguno más; resulta así que las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son

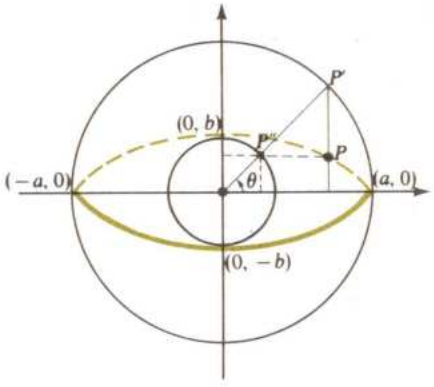
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

- Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (a_0,b_0), y cuyo vector dirección es $\vec{u} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$, son: $\begin{cases} x = a_0 + tm_1 \\ y = b_0 + tm_2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

- Consideremos la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (Fig. 5).}$$

Si, como en el caso de la circunferencia, elegimos como parámetro el ángulo θ que forma la parte positiva del eje OX con la circunferencia exterior de radio a y centro O, los puntos P' y P'' tienen de coordenadas respectivas ($a\cos\theta$, $a\,\text{sen}\theta$) y ($b\cos\theta$, $b\,\text{sen}\theta$).



(Fig. 5)

Entonces: $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\theta \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas de la elipse.

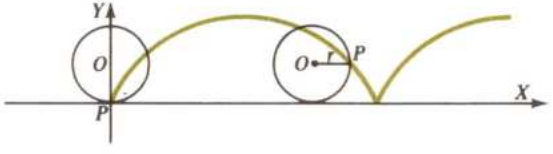
La ecuación explícita $y = f(x)$ de una curva es un caso particular de las paramétricas cuando se toma como parámetro la abscisa $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$

- En general, no es sencillo el paso de las ecuaciones paramétricas a la ecuación implícita, y, recíprocamente, y en cada caso particular, debe buscarse un método apropiado; por ejemplo, para pasar de las ecuaciones paramétricas de la elipse a la ecuación implícita, podemos elevar al cuadrado y sumar:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = \text{sen}\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \text{sen}^2\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ejercicios:

1. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva $y^2 - x^3 = 0$.
2. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la parábola $y^2 = 4px$, tomando como parámetro la pendiente de la tangente a la curva en cada punto.
3. Una circunferencia rueda sin deslizar sobre el eje OX. Tomando como parámetro el ángulo que ha girado el radio r de la figura 6, encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el punto P.



(Fig. 6)

4. Obtener las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ utilizando como parámetro la longitud del arco de circunferencia determinado por los puntos P y $A(a,0)$.

2 COORDENADAS POLARES

2.1. Cuando en el plano se fija un sistema de referencia ortonormal $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ se establece una correspondencia biyectiva entre puntos del plano y pares ordenados de números reales. Esta correspondencia es la que asocia al punto P el par (a,b), tal que $\overrightarrow{OP} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, es decir, asocia a P sus coordenadas respecto de $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

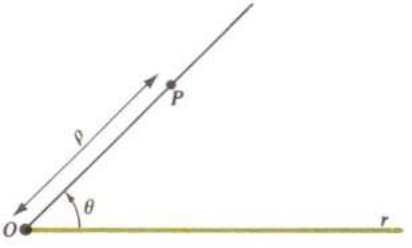
Mediante esta correspondencia se pueden traducir al lenguaje algebraico problemas geométricos; por ejemplo, el estudio de las posiciones relativas entre dos rectas del plano no se reduce a estudiar las posibles formas de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

Sistema incompatible ⟶ **Rectas paralelas**
Sistema compatible determinado ⟶ **Rectas que se cortan en un punto**
Sistema compatible indeterminado ⟶ **Dos rectas superpuestas**

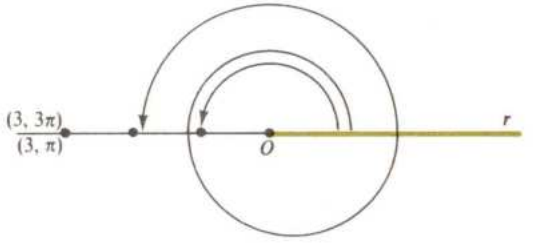
En muchos problemas geométricos las coordenadas cartesianas no son las más adecuadas, y dichos problemas se simplifican si introducimos otras correspondencias entre puntos del plano y pares de números reales.

Diremos que un plano se ha *coordenatizado* si se ha establecido una correspondencia biyectiva entre puntos del plano y pares de números reales. Un ejemplo de coordenatización del plano son las coordenadas cartesianas respecto de un sistema de referencia $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ ya estudiado; otro método muy útil de coordenatizar el plano son las coordenadas polares, que estudiamos a continuación.

Elijamos un punto del plano O y una semirrecta r que pasa por O; sea P un punto del plano distinto de O; entonces podemos asociar al punto P el par (ρ, θ), donde ρ es la distancia de O a P y θ el ángulo determinado por la semirrecta r y la semirrecta OP, expresado en radianes y medido en el sentido opuesto al movimiento de las agujas de un reloj (Fig. 7).



(Fig. 7)



(Fig. 8)

Esta correspondencia $P \leftrightarrow (\rho, \theta)$ no es, en principio, biyectiva; por ejemplo, los pares $(3, \pi)$ y $(3, 3\pi)$ representan el mismo punto (Fig. 8).

Esta situación es debida a que fijado ρ, el mismo punto puede determinarse por el ángulo θ o por el $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Para evitar este inconveniente convenimos en tomar θ variando entre 0 y 2π, es decir, $0 \leq \theta < 2\pi$; de esta forma la correspondencia entre los puntos del plano distintos de 0 y los pares (ρ, θ),donde $\rho \in \mathbb{R}_+$ (número real positivo) y $0 \leq \theta < 2\pi$ es biyectiva.

Para extender esta correspondencia a todos los puntos del plano, convendremos en asociar a O los pares $(0, \theta)$, es decir, que el punto O viene representado por cualquier par cuya primera componente es 0. De nuevo la correspondencia deja de ser biyectiva, pero esto no representa ningún inconveniente serio, puesto que O es el único punto para el que $\rho = 0$.

El par $\{O, r\}$ se dice un *sistema de coordenadas polares*, el punto O se llama el *polo* y la semirrecta r el eje polar.

Si P es un punto del plano, el par (ρ, θ) se llama las *coordenadas polares de P*, ρ se llama el *radio vector de P* y θ el *argumento de P*.

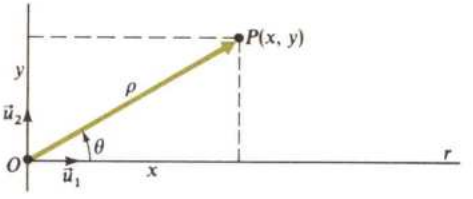
2.2. *Relación entre las coordenadas cartesianas y las polares.*

Supongamos fijado en el plano un sistema de referencia ortogonal $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ y un sistema de coordenadas polares $\{O,r\}$, donde r es la semirrecta formada por los puntos P tales que $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{x}_1$ con $\lambda \geq 0$, es decir, la parte positiva del eje OX del sistema de referencia $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$. Sea P un punto del plano cuyas coordenadas cartesianas son (x,y) y cuyas coordenadas polares son (ρ, θ); de la figura 9 se observa que si $P \neq O$,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases} \quad [1]$$

fórmula que nos permite conocer las coordenadas cartesianas de P conocidas las polares.

Si $P = 0$, $\rho = 0$ y $x = 0$, $y = 0$, que son las coordenadas cartesianas de O; por tanto, las fórmulas [1] son válidas para cualquier punto.



(Fig. 9)

Si en [1] elevamos al cuadrado y sumamos tenemos: $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\text{sen}^2\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = \rho^2$, de donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; por otra parte, si $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = \text{tg}\theta$, de donde $\theta = \text{arc tg}\frac{y}{x}$.

Si $x = 0$, entonces $\rho = 0$, y el punto es el origen, o bien $\cos\theta = 0$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Si escribimos de forma informal, $\frac{y}{0} = \pm\infty$ según y sea positivo o negativo, resulta $\theta = \text{arc tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \text{arc tg}(-\infty) = \frac{3\pi}{2}$; es decir, que con este convenio sigue siendo válida la fórmula $\theta = \text{arc tg}\frac{y}{x}$; por tanto, las fórmulas que dan las coordenadas polares, conocidas las cartesianas, son:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{arc tg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \quad [2]$$

Nota. Las fórmulas [1] y [2] expresan las relaciones entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto cuando los sistemas de referencia se eligen en *la forma indicada anteriormente*; por supuesto, si como polo o eje se elige otro punto o recta, estas fórmulas no son válidas; sin embargo, lo usual es hacer la elección en la forma indicada.

Ejemplos:

- El punto (4, 4) tiene de coordenadas polares

$$\rho = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\theta = \text{arc tg}\frac{4}{4} = \frac{\pi}{4}$$

es decir $\left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

- El punto $(-2, 2\sqrt{3})$ tiene de coordenadas polares

$$\rho = \sqrt{4 + 12} = 4$$
$$\theta = \text{arc tg}\frac{2\sqrt{3}}{-2} = 120° = \frac{2\pi}{3}$$

es decir $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

- El punto $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ tiene coordenadas cartesianas

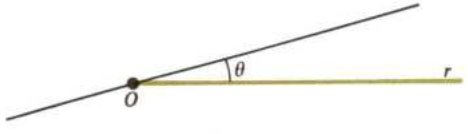
$$x = \rho\cos\theta = 3\cos\frac{5\pi}{6} = -3\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \rho\,\text{sen}\theta = 3\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

3 ALGUNOS EJEMPLOS DE CURVAS EN POLARES

3.1. La introducción de las coordenadas polares permite en muchos casos simplificar la expresión de las ecuaciones de ciertas curvas. Veremos algunos ejemplos.

a) *Recta que pasa por el polo.*

Consideremos la recta de pendiente m que pasa por el polo (Fig. 10).



(Fig. 10)

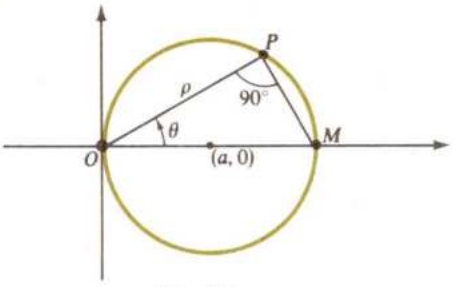
Sabemos que $m = \text{tg}\theta$; resulta entonces que $\theta = \text{arc tg}m$ es la ecuación polar de la recta que pasa por O y tiene pendiente m; por ejemplo, la bisectriz del primer cuadrante tiene ecuación polar $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) *Circunferencia de centro el polo y radio r.*

Un punto pertenece a dicha circunferencia si y sólo si un radio vector vale r; luego la ecuación polar será $\rho = r$.

c) *Circunferencia de centro (a,0) y radio r.*

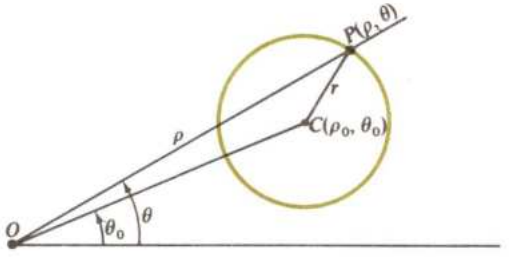
De la figura 11 se observa que el punto P pertenece a la circunferencia si y sólo si el ángulo $\widehat{OPM}$ es recto; entonces debe ser $\rho = 2a\cos\theta$, que es la ecuación polar de dicha circunferencia.



(Fig. 11)

d) *Circunferencia de centro el punto de coordenadas polares (ρ_0, θ_0) y radio r.*

Consideremos un punto P de coordenadas polares (ρ, θ) de la circunferencia. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\widehat{OCP}$ de la figura 12.



(Fig. 12)

resulta $\boxed{r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}$, que es la ecuación polar de la circunferencia.

3.2. *Representación de curvas en coordenadas polares.*

Una curva en polares es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas coordenadas polares (ρ, θ) verifican una ecuación del tipo $F(\rho, \theta) = 0$.

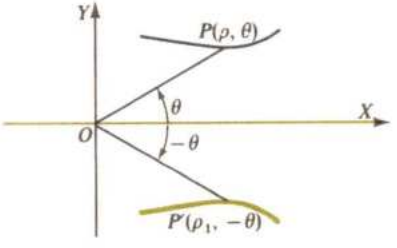
La ecuación anterior se llama la *ecuación implícita en polares de la curva*; si se puede despejar ρ, entonces la ecuación $\rho = f(\theta)$ se denomina la *ecuación explícita en polares de la curva.*

Para tener una idea aproximada de la forma de la curva de ecuación $\rho = f(\theta)$, se pueden dar a θ diversos valores y obtener los correspondientes valores de ρ; en particular, interesa conocer aquellos valores de θ que corresponden a valores máximos y mínimos de ρ. También es interesante determinar las simetrías de la curva.

Los tipos más importantes de simetría son los siguientes:

i) *Simetría respecto del eje Z.*

Cuando la ecuación no se altera al reemplazar θ por $-\theta$ (Fig. 13).



(Fig. 13)

Ejemplo:

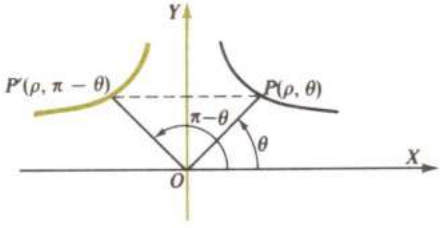
- $\rho = a\cos\theta$ es simétrica respecto del eje X, ya que $a\cos(-\theta) = a\cos\theta = \rho$.

ii) *Simetría respecto del eje Y.*

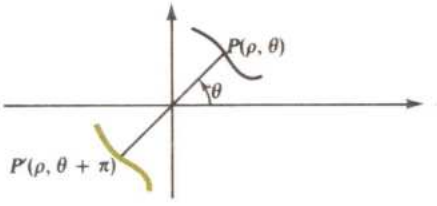
Cuando la ecuación no se altera al reemplazar θ por $\pi - \theta$ (Fig. 14).

Ejemplo:

- $\rho = a\,\text{sen}\theta$ es simétrica respecto del eje y, ya que $a\,\text{sen}(\pi - \theta) = a\,\text{sen}\theta = \rho$. (Los ángulos suplementarios tienen el mismo seno.)



(Fig. 14)



(Fig. 15)

iii) *Simetría respecto del origen O.*

Cuando la ecuación no se altera al reemplazar θ por $(\theta + \pi)$ (Fig. 15).

Así la curva $\rho = a\cos^2\theta$ es simétrica respecto del origen.

Ejemplo:

- Vamos a representar la curva $\rho = a(1 - \cos\theta)$, donde $a > 0$.

  Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la curva es simétrica respecto del eje X; por tanto, nos basta representar la función de curva sobre el eje X.

  No hay otras simetrías.

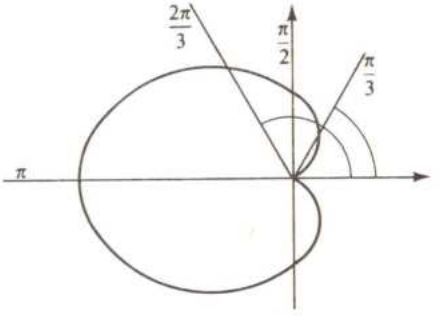
  Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, los valores de ρ pueden variar solamente entre 0 y $2a$. El valor mínimo de ρ ocurre cuando $\theta = 0$, y el máximo cuando $\theta = \pi$.

  Además, dado que $\cos\theta$ decrece de 1 a -1 cuando θ varía de 0 a π, resulta que ρ crece de 0 a $2a$ cuando θ varía entre 0 y π.

Dando algunos valores intermedios, como se indica en la tabla, resulta (Fig. 16):

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$

La curva así obtenida se denomina *cardioide*. (Para una interpretación mecánica de esta curva, ver ejercicio 8.)



(Fig. 16)

Ejercicios:

1. Hallar la ecuación en coordenadas polares de la recta $3x + 4y = 5$.

2. Encontrar la ecuación en coordenadas polares de la recta que pasa por los puntos (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2).

3. ¿Cuál es la ecuación cartesiana de la curva cuya ecuación polar es $\rho = 2\cos\theta$?

4. Encontrar la ecuación polar de la circunferencia de radio 3 y centro el punto (0, 3).

5. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de radio 5 y centro el punto de coordenadas polares $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

6. Encontrar los puntos de intersección de las curvas en las que las ecuaciones polares son $\rho = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$, $\rho = 2a\cos\theta$.

7. Dibujar las curvas de ecuación polares:
   i) $\rho = a(1 + \cos\theta)$.
   ii) $\rho = 5$.
   iii) $\theta = \frac{\pi}{2}$.
   iv) $\rho = a\operatorname{sen}\theta$.

8. Se consideran dos circunferencias del mismo radio, $\frac{a}{2}$, una fija y otra que rueda sin resbalar permaneciendo tangente a la fija:
   a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por un punto de la circunferencia en su movimiento. (Indicación: tomar como parámetro el ángulo determinado por el punto de tangencia, el centro de la circunferencia móvil y el punto cuyo lugar se desea determinar.)
   b) Encontrar la ecuación polar de la curva obtenida en a) (cardioide).

4 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS EN EL ESPACIO

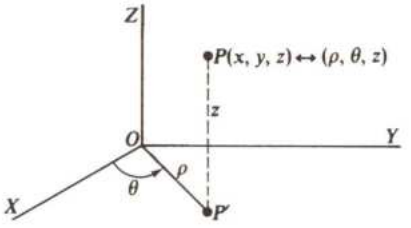
4.1. Sea $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia ortogonal del espacio euclídeo. Ya se ha visto que a cada punto P se le puede asociar de forma única un triple ordenado de números reales (x,y,z) tales que $\overrightarrow{OP} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$.

El triple (x,y,z) se denomina las *coordenadas cartesianas de P respecto de* $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

Como en el caso del plano, muchas veces es conveniente fijar la posición de los puntos del espacio utilizando otro tipo de coordenadas; los sistemas de coordenadas no cartesianas más empleados son las *coordenadas cilíndricas* y las *coordenadas esféricas*.

4.2. *Coordenadas cilíndricas.*

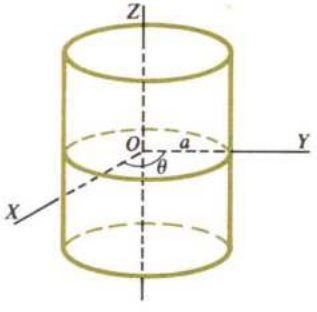
Consideremos el sistema de referencia ortogonal $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y sea P un punto del espacio de coordenadas cartesianas (x,y,z) (Fig. 17). La proyección de P sobre el plano XY (es decir, el plano determinado por los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$) es un punto P'. Si en dicho plano XY tomamos un sistema de coordenadas polares cuyo polo sea O y cuyo eje polar sea la parte positiva del eje OX, entonces el punto P' tiene más coordenadas polares (ρ, θ); el punto P entonces está determinado de forma única por el triple (ρ, θ, z). Este triple se denomina las *coordenadas cilíndricas del punto P.*



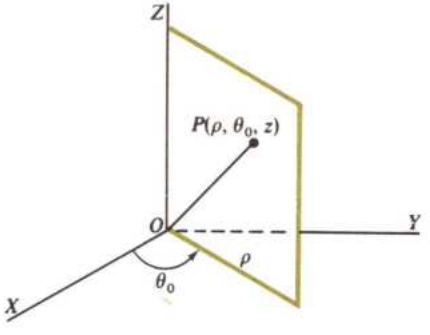
(Fig. 17)

Ejemplos:

- La superficie del cilindro de la figura 18 de radio a tiene por ecuación $\rho = a$.



(Fig. 18)



(Fig. 19)

- La ecuación $\theta = \theta_0$ (constante) representa un plano que pasa por el eje Z y forma un ángulo θ_0 con el eje OX (Fig. 19).

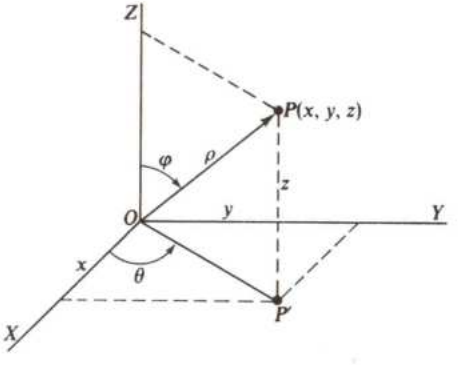
4.3. *Coordenadas esféricas.*

Sea $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia ortogonal en el espacio euclídeo y sea P un punto de coordenadas cartesianas (x,y,z) (Fig. 20). Llamando P' a la proyección de P sobre el plano XY, el punto P queda determinado de forma única si se conocen los valores siguientes:

ρ = distancia de O a P.

θ = ángulo que forma la parte positiva del eje OX con la recta OP'.

φ = ángulo que forma la parte positiva del eje OZ con la recta OP.



(Fig. 20)

El triple (ρ, θ, φ) se llama las *coordenadas esféricas del punto P.*

ρ se llama el *radio vector* de P.
θ se llama la *longitud* de P.
φ se llama la *colatitud* de P.

4.4. Si (x,y,z) y (ρ,θ,φ) son las coordenadas cartesianas y esféricas de P, respectivamente, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x = OP' \cdot \cos\theta = OP \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\theta = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = OP' \cdot \operatorname{sen}\theta = OP \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = OP \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \rho \cos\varphi \end{cases} \quad [1]$$

Estas fórmulas permiten calcular las coordenadas cartesianas de P conocidas sus coordenadas esféricas.

Si elevamos al cuadrado las tres igualdades anteriores y sumamos, se tiene:

$x^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta$

$y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta$

$z^2 = \rho^2 \cos^2\varphi$

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2$

luego $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Además, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$, de donde $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. Finalmente:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \\ z^2 &= \rho^2 \cos^2\varphi \end{aligned}$$

de donde $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$, y por tanto, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$

Las fórmulas:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases} \quad [2]$$

permiten calcular las coordenadas esféricas de P conocidas sus coordenadas cartesianas.

Nota. Las coordenadas cilíndricas son útiles cuando queremos estudiar problemas geométricos en los que aparece un eje de simetría; en este caso es conveniente elegir el sistema de referencia de forma que el eje Z sea precisamente dicho eje de simetría. Las coordenadas esféricas son a su vez útiles cuando existe un centro de simetría, en cuyo caso dicho punto debe tomarse como origen de coordenadas.

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas verifican $z = 8$? ¿Y $\theta = \pi/4$?

2. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas son:

$$\left(3, \frac{\pi}{4}, 2\right) \quad , \quad \left(5, \frac{5\pi}{6}, -1\right) ?$$

3. Encontrar las coordenadas cilíndricas de un punto cuyas coordenadas cartesianas son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -3\right)$$

4. ¿Puede un punto tener coordenadas cilíndricas $(-1, 0{,}8, \sqrt{3})$? ¿Y $(4, 3, -1)$?

5. ¿Cuáles son las coordenadas esféricas de un punto cuyas coordenadas cartesianas son $(1, 1, 1)$?

6. Las coordenadas esféricas de P son $\left(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de P? ¿Y las cilíndricas?

7. Escribir la ecuación dada en los siguientes casos en las coordenadas que se indican.

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	en coordenadas esféricas.
$x^2 + y^2 + z^2 = 4a$	en coordenadas cilíndricas.
$z^2 = 4$	en coordenadas esféricas.
$\rho = 6 \cos\varphi$	en coordenadas cartesianas.

5 SUPERFICIES Y CURVAS EN EL ESPACIO

Consideremos un sistema de referencia ortogonal en el espacio $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$. Una superficie en el espacio se puede considerar como el lugar geométrico de todos los puntos P cuyas coordenadas (x,y,z) verifican una ecuación de la forma $f(x,y,z) = 0$.

Por ejemplo, un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es una superficie; el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas verifican $x^2 + y^2 = z$ es asimismo una superficie, etc.

La ecuación $f(x,y,z) = 0$ se denomina la *ecuación implícita* de la superficie. Si la variable z puede despejarse, entonces $z = f(x,y)$ se denomina la *ecuación explícita* de la superficie. Al igual que sucedía con las curvas en el plano, no es siempre posible obtener la ecuación explícita de una superficie a partir de su ecuación implícita. Por ejemplo, la ecuación implícita de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$. Si $C \neq 0$, entonces

$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$ es la ecuación explícita de dicho plano.

Una superficie puede también considerarse como el lugar geométrico de las posiciones de un punto que se mueve con dos grados de libertad, es decir, como el lugar de los puntos cuyas coordenadas pueden expresarse en la forma

$$\begin{cases} x = f(t,s) \\ y = g(t,s) \\ z = h(t,s) \end{cases} \quad [1]$$

donde f, g y h son funciones continuas de las dos variables s y t que se llaman *parámetros*.

Las ecuaciones de [1] se llaman las *ecuaciones paramétricas* de la superficie.

Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $P(a,b,c)$ y determinado por los vectores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$, son:

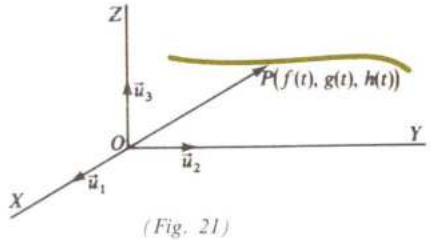
$$\begin{cases} x = a + tu_1 + sv_1 \\ y = b + tu_2 + sv_2 \\ z = c + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

La eliminación, si es posible, de los parámetros t y s en las ecuaciones paramétricas conduce a la ecuación implícita de la superficie.

Una curva en el espacio (Fig. 21) puede considerarse como el lugar geométrico de las posiciones de un punto que se mueve con un grado de libertad, es decir, el lugar de los puntos cuyas coordenadas pueden expresarse en la forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad [2]$$

donde f, g y h son funciones continuas de la variable t, que, como es usual, se llama el parámetro. Las ecuaciones [2] se denominan las *ecuaciones paramétricas* de la curva.



(Fig. 21)

Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(a,b,c)$ y de rectas dirección $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ son:

$$\begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \\ z = c + tv_3 \end{cases}$$

Consideremos el caso de la recta anterior; si eliminamos el parámetro, obtenemos:

$$t = \frac{x-a}{v_1} \qquad (v_1 \neq 0)$$

de donde:

$$y = b + \frac{x-a}{v} v_2$$

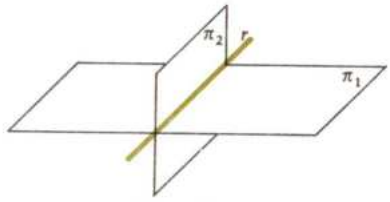
$$z = c + \frac{x-a}{v_1} v_3$$

resulta así que la recta se puede considerar como el conjunto de puntos cuyas coordenadas verifican el sistema:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= 0 \quad [3] \\ \psi(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

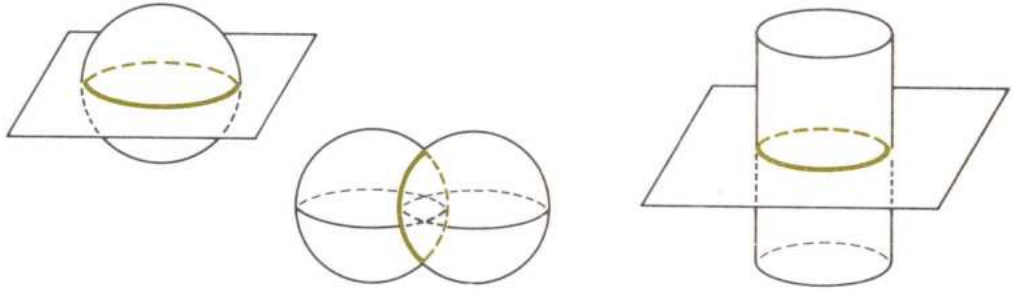
Cada una de las ecuaciones de [3] representa la ecuación implícita de una superficie (en nuestro caso un plano); de aquí que una curva en el espacio puede también definirse como la intersección de dos superficies.

Por ejemplo, una recta es la intersección de dos planos (Fig. 22).



(Fig. 22)

Análogamente, una circunferencia en el espacio puede definirse como la intersección de una esfera con un plano, o como la de un cilindro con un plano o dos esferas (Fig. 23).



(Fig. 23)

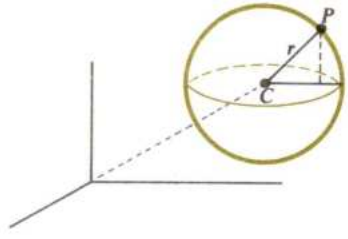
Una curva que está contenida en un plano se dice una *curva plana*; en caso contrario se dice *alabeada*.

6 ESTUDIO DE ALGUNAS SUPERFICIES

En este apartado supondremos fijado un sistema de referencia ortogonal $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

a) *Esfera.*

Es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo C llamado *centro*. La distancia del centro a cada uno de los puntos de la esfera se denomina el *radio* de la esfera (Fig. 24).



(Fig. 24)

Si las coordenadas del centro son (a,b,c) y $r > 0$ es el radio de la esfera, entonces un punto $P(x,y,z)$ pertenece a la esfera si y sólo si la distancia de C a P es r, es decir, si el módulo del vector $\overrightarrow{CP}$ es r; entonces:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$$

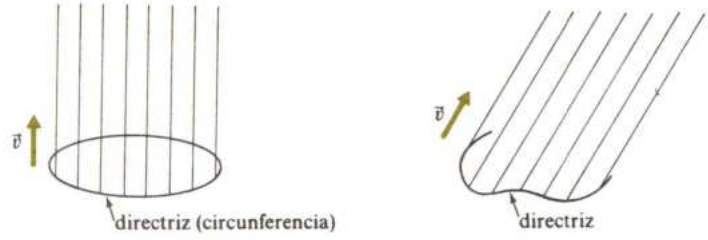
y elevando al cuadrado, resulta:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

que es la ecuación en coordenadas cartesianas de la esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio r.

b) *Superficies cilíndricas.*

Una *superficie cilíndrica* es la formada por los puntos de todas las rectas que cortan a una curva dada, llamada *directriz*, y son paralelas a un vector no nulo dado $\vec{v}$ (Fig. 25).



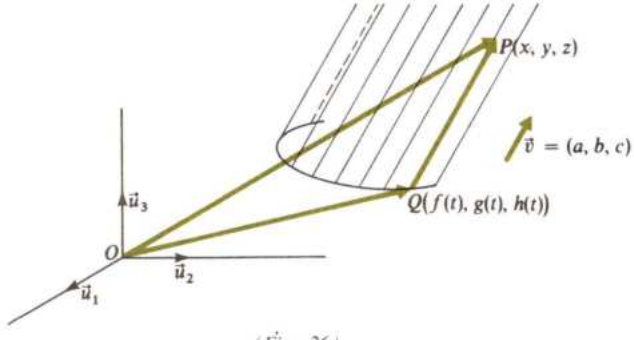
(Fig. 25)

Las rectas paralelas al vector $\vec{v}$ sobre la superficie se llaman *generatrices* de la superficie.

Sean

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

las ecuaciones paramétricas de la directriz y $\vec{v} = (a,b,c)$ (Fig. 26).



(Fig. 26)

Un punto P pertenece a la generatriz si y sólo si existe un punto Q en la directriz tal que $\overrightarrow{QP}$ es paralelo a $\vec{v}$.

Si Q pertenece a la generatriz, las coordenadas de Q serán $(f(t),g(t),h(t))$ para algún valor del parámetro t; si $\overrightarrow{QP}$ es paralelo a $\vec{v}$, debe existir un s tal que $\overrightarrow{QP} = s\vec{v} = (sa, sb, sc)$; entonces de la relación:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

resulta $(x,y,z) = (f(t),g(t),h(t)) + (sa,sb,sc)$, de donde:

$$\begin{cases} x = f(t) + sa \\ y = g(t) + sb \\ z = h(t) + sc \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la superficie cilíndrica.

La ecuación de la superficie cilíndrica de generatrices paralelas al vector (1, 1, 1) y directriz la curva

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} t \\ y = b \cos t \\ z = 0 \end{cases}$$

son

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} t + s \\ y = b \cos t + s \\ z = \qquad\quad s \end{cases}$$

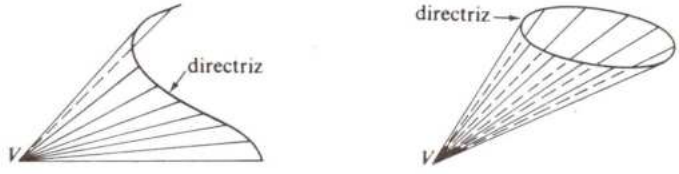
Eliminando los parámetros s y t resulta:

$$\begin{aligned} x - z &= a \operatorname{sen} t \\ y - z &= b \cos t \end{aligned}$$

de donde $\left(\frac{x-z}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-z}{b}\right)^2 = 1.$

c) *Superficies cónicas.*

Una *superficie cónica* es la formada por los puntos P de todas las rectas que pasan por un punto fijo, llamado *vértice*, y cortan a una curva fija llamada *directriz* (Fig. 27).

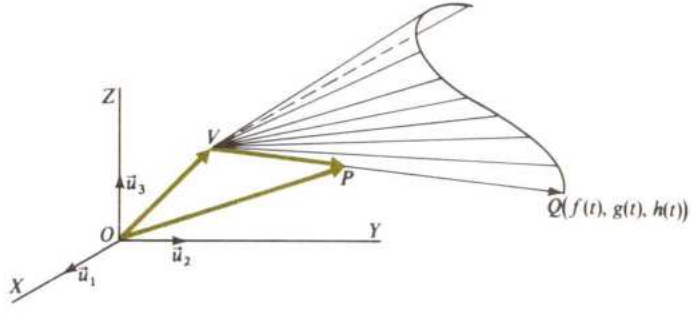


(Fig. 27)

Sean

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

las ecuaciones paramétricas de la directriz y $V = (a,b,c)$ (Fig. 28).



(Fig. 28)

Un punto P pertenece a la superficie cónica si existe un punto Q en la directriz tal que $\overrightarrow{VP} = s\overrightarrow{VQ}$ para algún $s \in \mathbb{R}$.

De la relación: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VP}$

se sigue que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OV} + s\overrightarrow{VQ}$, y de aquí que

$$(x,y,z)=(a,b,c)+s(f(t)-a,g(t)-b,h(t)-c)$$

y

$$\begin{cases} x = a + s(f(t)-a) \\ y = b + s(g(t)-b) \\ z = c + s(h(t)-c) \end{cases}$$

que son las *ecuaciones paramétricas de la superficie cónica.*

Ejemplo:

- Las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica de vértice el origen (0, 0, 0) y directriz la curva

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t \\ y = 2 \cos t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{son}$$

$$\begin{cases} x = 2s \operatorname{sen} t \\ y = 2s \cos t \\ z = 3s \end{cases}$$

Eliminando los parámetros s,t, se tiene $s = \frac{z}{3}$

$$\left(\frac{3x}{2z}\right)^2 + \left(\frac{3y}{2z}\right)^2 = 1$$

o bien $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$.

d) *Superficies de revolución.*

Se llama *superficie de revolución* a la engendrada por una curva, llamada *generatriz*, al girar alrededor de una recta que se llama *eje de revolución.*

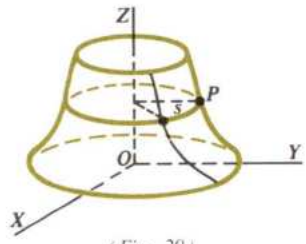
Eligiendo un sistema de coordenadas que tenga como eje Z el eje de revolución de la figura 29 y de las fórmulas de giro, se deduce que las ecuaciones de la superficie de revolución son:

$$\begin{cases} x = f(t) \cos s - g(t) \operatorname{sen} s \\ y = f(t) \operatorname{sen} s + g(t) \cos s \\ z = h(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de la generatriz y s es el ángulo de giro.



(Fig. 29)

Ejemplo:

- Consideremos la parábola de ecuaciones

$$\begin{cases} z - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vamos a encontrar la ecuación de la superficie engendrada al girar alrededor del eje OZ.

Las ecuaciones paramétricas de la parábola son

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}$$

Entonces, las ecuaciones de la superficie son:

$$\begin{cases} x = -t \operatorname{sen} s \\ y = t \cos s \\ z = t^2 \end{cases}$$

de donde $x^2 + y^2 = t^2 = z$, es decir, $x^2 + y^2 - z = 0$ es la ecuación buscada.

Ejercicios:

1. Hallar la ecuación de la esfera de centro $P = (1, 1, -1)$ y radio $r = 3$.
2. Encontrar el centro y radio de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 - 2y + z^2 - 2z - 14 = 0$.
3. Hallar la intersección de la esfera de centro (3, 1, 0) y radio 2 con la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \quad t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

4. Encontrar la ecuación en coordenadas esféricas de una esfera de centro el origen y radio 5.
5. Hallar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $x + y + 1 = 0$.
6. Encontrar las ecuaciones de la superficie cilíndrica de directriz

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

sabiendo que sus generatrices son paralelas a la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

7. Si la directriz de una superficie cilíndrica es una recta, ¿qué puede decirse de dicha superficie?
8. Encontrar las ecuaciones de una superficie cónica de vértice (1, 1, 1) y directriz la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

EJERCICIOS FINALES

1. Encontrar las ecuaciones implícitas de las siguientes curvas:

   a) $\begin{cases} x = 2 + 1/t \\ y = 2 - 5t \end{cases} \quad 0 < t < \infty$

   b) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 4 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x = 2 + 4\,\text{sen}t \\ y = 3 - 2\cos t \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}$

2. Hallar las ecuaciones paramétricas de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, tomando como parámetro la pendiente de la tangente a la curva.

3. Sea C la circunferencia de radio r y centro $(0, r)$. Una recta variable que pasa por el origen corta a la recta $y = 2r$ en un punto A y a la circunferencia en un punto B. Sea P el punto de intersección de la paralela al eje X por B y la paralela al eje Y por A. Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por P tomando como parámetro el ángulo θ que forma el eje OX con la recta OA. Hallar la ecuación implícita.

   (A esta curva se la conoce con el nombre de *versiera*.)

4. Encontrar la ecuación en coordenadas polares de la recta $x + y - 1 = 0$.

5. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro $(0, \pi)$ y radio 3.

6. Hallar la ecuación cartesiana de una curva cuya ecuación en polares es $\rho = 2a\,\text{sen}\theta$.

7. Encontrar en coordenadas polares el lugar de los puntos P tales que el producto de las distancias a los puntos $A(a,\pi)$ y $B(a,0)$ es constante e igual a c^2.

8. Un segmento rectilíneo de longitud $2a$ se mueve manteniendo sus extremos en los ejes X e Y. Hallar, en coordenadas polares, el lugar de los puntos P de la intersección del segmento y la perpendicular a éste trazada desde el origen.

9. Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos $(1, \pi, -\pi)$, $(1, 0, \pi)$, $\left(2, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

10. Escribir en coordenadas cilíndricas la ecuación del plano $x + 2y = 1$.

11. Demostrar que la curva de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \text{t} + t^2 \\ y = 2t - t^2 \\ z = t + 2t^2 \end{cases}$$

   es plana y encontrar las ecuaciones del plano que la contiene.

12. Dada la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + cxz + fyz + gx + hy + kz + l = 0$$

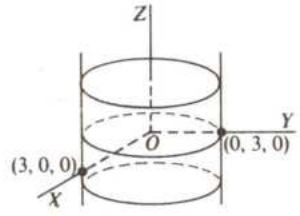
   encontrar las condiciones que deben verificar los coeficientes para que represente una esfera. Determinar, en función de dichos coeficientes, el centro y el radio.

13. Encontrar la ecuación de la superficie cilíndrica de directriz la curva

$$\begin{aligned} x &= 2 \operatorname{sen} t \\ y &= 4 \cos t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

y generatrices paralelas a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{1}$.

14. Encontrar la ecuación de la superficie de la figura 30.



(Fig. 30)

15. Encontrar la ecuación de la superficie cónica de vértice $V = (0, 1, 0)$ y directriz la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \\ z = t^2 - 1 \end{cases}$$

16. Encontrar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por

$$\begin{aligned} x^2 - z^2 &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

al girar alrededor del eje Z.

17. ¿Cuál es la forma de la ecuación de un cilindro de generatrices paralelas a un eje de coordenadas y cuya directriz está contenida en el plano determinado por los otros dos ejes de coordenadas?

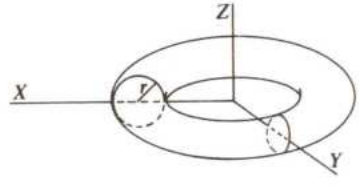
18. Demostrar que una esfera puede considerarse como una superficie de revolución.

19. La recta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

gira alrededor del eje Z. Encontrar la ecuación de la superficie engendrada y demostrar que dicha superficie puede considerarse como una superficie cónica.

20. El *toro* es la superficie engendrada por una circunferencia al girar alrededor de una recta situada en un plano y que no la corta. Hallar la ecuación de dicha superficie. (Ver figura 31.)



(Fig. 31)

UNIDAD 3
AMPLIACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

El cálculo diferencial e integral es, sin duda, una de las partes de la Matemática que más aplicaciones tiene en la ciencia y en la técnica. Fue precisamente al tratar de resolver los problemas planteados por la Física cuando el Cálculo alcanzó los mejores y más interesantes resultados.

Las cuestiones de que se ocupa el Cálculo se fundamentan en las propiedades de los números reales; por esta razón se inicia la Unidad con el estudio del cuerpo de los números reales.

Los temas 14 y 15 se dedican al estudio de la continuidad y derivabilidad, respectivamente. Estas cuestiones, que en parte han sido tratadas en el BUP, se abordan de nuevo aquí en un contexto más amplio y riguroso.

El tema 16 se dedica al estudio de las importantes consecuencias del teorema del valor medio, incluida la regla de L'Hôpital.

El problema de la aproximación local de funciones se estudia en el tema 17; en él se da el teorema de Taylor y sus consecuencias. Después del estudio de la resolución aproximada de ecuaciones, en el tema 18, se inician los temas de Cálculo integral.

En los primeros temas se estudian los métodos de integración, y se establecen el concepto de integral definida y el teorema fundamental del Cálculo. A continuación se aplica la integral al cálculo de áreas de recintos planos y de volúmenes de sólidos de revolución.

El problema de la interpolación, que permite pasar de un conjunto de valores conocidos a una función generalmente polinómica que se verifique para esos valores, se estudia en el tema 23. La Unidad finaliza con un tema dedicado a la integración numérica.

TEMA 13
LOS NÚMEROS REALES COMO FUNDAMENTO DEL CÁLCULO

En este tema se inicia el estudio de la rama de la Matemática denominada Cálculo. Los dos problemas fundamentales de dicha rama son: la determinación de la tangente en un punto de una curva (que da origen al denominado cálculo diferencial) y encontrar el área encerrada por una curva (problema inicial del cálculo integral). La formulación rigurosa de estos problemas, que así enunciados son intuitivamente claros y sencillos, exige una fina formulación matemática.

El fundamento para dicha formulación son los números reales, cuyo estudio se aborda en este tema. Los números reales, que son la base del Cálculo, ya han sido estudiados en cursos anteriores de una forma más o menos formal. Si se quiere dar una definición rigurosa de los números reales es necesaria una preparación que excedería de los límites impuestos a este curso; nosotros partiremos de la asunción de que existe un conjunto que verifica un sistema de axiomas, al que denominaremos conjunto de los números reales.

1 LOS NÚMEROS REALES

1.1. Como ya se indicó en la introducción al tema, admitiremos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades conocidas como *axiomas de los números reales*:

Axioma I: En $\mathbb{R}$ hay definidas dos operaciones, llamadas *suma* y *producto* y representadas por $+$ y $\cdot$ (o sin punto), tales que $\mathbb{R}$ con estas operaciones es un cuerpo conmutativo.

Axioma II: En $\mathbb{R}$ hay definida una relación de orden total representada por $\leq$ tal que se verifica:

II a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \leq z$ implica $x + y \leq x + z$.
II b) Si $y \leq z$ y $0 \leq x$, entonces $x \cdot y \leq x \cdot z$.

A partir de estas propiedades se deducen todas las conocidas propiedades de las desigualdades, que utilizaremos sin mención explícita.

Como es usual, $x < y$ significa $x \leq y$ y $x \neq y$. Además, $x \leq y$ (respectivamente $x < y$) es equivalente a $y \geq x$ (respectivamente $y > x$).

1.2. Antes de introducir el tercer y último axioma, vamos a exponer algunos conceptos relacionados con la relación de orden $\leq$, que necesitaremos para enunciarlo.

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$; un elemento $a \in \mathbb{R}$ se dice una *cota superior de* X si para todo $x \in X$ se verifica $x' \leq a$.

De forma análoga, un elemento $a' \in \mathbb{R}$ se dice una *cota inferior de* X si para todo $x \in X$ se verifica $a' \leq x$.

Si un conjunto tiene, al menos, una cota superior se dice que está *acotado superiormente*; análogamente, si tiene una cota inferior, se dice *acotado inferiormente*.

Cuando un conjunto está acotado superior e inferiormente, se dice que está *acotado*.

Ejemplos:

- Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$. Entonces X está acotado inferiormente, pues $0 \leq x$, para todo $x \in X$, pero no está acotado superiormente.
- Sea ahora el conjunto $X = \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$. X está acotado superiormente, pues 0 es una cota superior; sin embargo, X no lo está inferiormente.
- Sea X el conjunto de los números racionales. Entonces X no está acotado ni superior ni inferiormente.

1.3. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que un elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ es el *supremo de* X si verifica las siguientes condiciones:

a) α es una cota superior de X.
b) Si b es una cota superior de X, entonces $\alpha \leq b$.

Es decir, α es la menor de todas las cotas superiores.

Si α es el supremo de X, escribimos $\alpha = \sup X$.

Si existe $\sup X$, entonces éste es único (ejercicio 5).

De forma análoga, se dice que $\alpha' \in \mathbb{R}$ es el *ínfimo de* X si verifica:

a) α' es una cota inferior de X.
b) Si b es una cota inferior de X, entonces $b \leq \alpha'$.
Escribimos: $\alpha' = \inf X$.

Ejemplos:

- Un subconjunto de $\mathbb{R}$ no tiene por qué poseer supremo o ínfimo. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no tiene supremo ni ínfimo.
- El conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$ tiene supremo, que es $\sqrt{2}$. ¿Tiene ínfimo?

1.4. Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$; entonces $\alpha = \sup X$ si y sólo si se verifican las condiciones:

a) α es una cota superior de X.
b) Para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un $x \in X$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$.

Supongamos que $\alpha = \sup X$. Entonces se verifica a) por la definición de supremo. Veamos que se verifica b). Sea $\varepsilon > 0$; si no se verificara b), debería ser $x \leq \alpha - \varepsilon$ para todo $x \in X$, luego $\alpha - \varepsilon$ es una cota superior de X; pero como $\varepsilon > 0$, entonces $\alpha - \varepsilon < \alpha$, contradiciendo el hecho de que α es la menor de todas las cotas superiores. Por tanto, la hipótesis de que todo $x \in X$ verifica $x \leq \alpha - \varepsilon$ es falsa, y por ello debe existir al menos un $x \in X$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$.

Recíprocamente, si α verifica las condiciones a) y b), entonces veamos que $\alpha = \sup X$. Por a) α es una cota superior; veamos que es la menor. Supongamos que β es otra cota de X, y que $\beta < \alpha$, sea $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$. Entonces, por b) existe un $x \in X$, tal que $\alpha - \varepsilon < x$, es decir, $\beta < x$, pero entonces β no es una cota superior de X; de aquí que α es la menor de las cotas superiores de X y $\alpha = \sup X$.

1.5. De forma análoga se tiene el teorema:

Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$; entonces, $\alpha' = \inf X$ si y sólo si se verifican las condiciones:

a') α' es una cota inferior de X.
b') Para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un $x \in X$ tal que $x < \alpha' + \varepsilon$.

1.6. Estamos ahora en condiciones de enunciar el tercer y último axioma de los números reales:

Axioma III: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ *que está acotado superiormente tiene supremo.*

Nota: Este axioma, que se conoce como *principio del supremo*, es característico de $\mathbb{R}$. Observemos que, por ejemplo, $\mathbb{Q}$ verifica los axiomas I y II, pero no el III, pues el conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$ está acotado superiormente; por ejemplo 3 es una cota superior, y sin embargo no existe $\sup X$, pues $\sqrt{2}$ no es racional.

De este axioma se deduce (ver ejercicio 7 de este apartado) que todo *subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$ *acotado inferiormente* tiene ínfimo.

Ejercicios:

1. Si x es un número real y $0 < x$ se dice que x es positivo; si $x < 0$, se dice que x es negativo. Demostrar que el producto de dos números positivos es positivo; que el producto de un número positivo por un número negativo es negativo y que el producto de dos negativos es positivo.

   Nota: En este ejercicio, como en los dos siguientes, las demostraciones deben realizarse utilizando solamente las propiedades de $\mathbb{R}$ del cuadro **1.7.**

2. Demostrar que si $x \leq y$ y $z \leq 0$, entonces $zy \leq zx$.

3. Demostrar que el cuadrado de cualquier número distinto de 0 es positivo.

4. Demostrar que $x < y$ si y solamente si $y - x$ es positivo.

5. Demostrar que si existe supremo de X, éste es necesariamente único. Lo mismo ocurre para el ínfimo.

6. Se considera el conjunto $X = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. ¿Está X acotado superiormente? ¿Inferiormente? Encontrar $\sup X$.

7. Si $X \subset \mathbb{R}$, escribiremos $-X$ para representar el conjunto $-X = \{-x / x \in \mathbb{R}\}$. Demostrar:
   a) Si X está acotado inferiormente, entonces $-X$ está acotado superiormente.
   b) Si $\alpha = \sup(-X)$, entonces $-\alpha = \inf X$.
   c) Deducir que todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

1.7. Exponemos a continuación los axiomas enunciados.

Axioma I $\mathbb{R}$ es un cuerpo	1. Existe una operación interna: + (suma).
	2. La suma es asociativa.
	3. La suma es conmutativa.
	4. Existe elemento neutro para la suma: (0).
	5. Todo elemento x tiene opuesto: $-x$.
	6. Existe una operación interna: $\cdot$ (producto).
	7. El producto es asociativo.
	8. El producto es conmutativo.
	9. Existe un elemento neutro para el producto: (1).
	10. Todo elemento x *distinto de cero* tiene inverso: $\frac{1}{x}$.
	11. El producto es distributivo respecto de la suma.
Axioma II Orden en $\mathbb{R}$	12. Existe en $\mathbb{R}$ una relación $\leq$ que es de orden total, es decir: Para todo $x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$ (reflexiva). Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$ (antisimétrica). Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitiva). Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces o $x < y$ o $x = y$ o $y < x$ (orden total).
	13. Para todo $x \in \mathbb{R}$ si $y \leq z$, entonces $x + y \leq x + z$.
	14. Si $y \leq z$ y $0 \leq x$, entonces $xy \leq xz$.
Axioma III Principio del supremo	15. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, admite supremo.

2 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

2.1. *Para todo número real positivo x existe un número natural n tal que $x < n$.*

Sea $x > 0$ y supongamos que no se verificará el teorema. Entonces, para todo número natural n se tendría $n < x$; luego el conjunto $\mathbb{N}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente por x. Por el principio del supremo, existe sup$\mathbb{N}$. Sea éste α. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en **1.4**, existe un número natural n_0 tal que $\alpha - \frac{1}{2} < n_0$; entonces $\alpha < \alpha + \frac{1}{2} < n_0 + 1$, en contradicción con que α es una cota de $\mathbb{N}$; luego $x < n$.

2.2. Por poseer la propiedad **2.1**, se dice que $\mathbb{R}$ es *arquimidiano*.

2.3. Si x e y son números reales e $y > 0$, entonces existe un número natural n tal que $x < ny$.

Si x es menor o igual que 0, basta tomar $n = 1$. Supongamos entonces $x > 0$; entonces, $\frac{x}{y} > 0$. Por la propiedad de ser $\mathbb{R}$ arquimidiano, existe un número natural n tal que $\frac{x}{y} < n$; luego $x < ny$.

A continuación vamos a ver dos propiedades de $\mathbb{R}$ que se conocen como propiedades de *densidad*.

2.4. Sean x e y dos números reales tales que $x < y$; entonces existe un número racional q tal que $x < q < y$.

Supongamos $x < y$; entonces $\frac{1}{y - x}$ es positivo, y por tanto existe un natural m tal que $\frac{1}{y - x} < m$; es decir, $1 < my - mx$.

Sea A el conjunto de los números naturales que son mayores que mx; este conjunto no es vacío por ser $\mathbb{R}$ arquimidiano. Sea n el menor elemento de A; entonces $mx < n$. Si tuviéramos $my \leq n$, como $mx < my \leq n$, sería $mx < my - 1 \leq n - 1$; luego $n - 1$ es mayor que mx, y por tanto, $n - 1 \in A$. Pero esto no puede suceder, pues n es el menor elemento de A, luego debe tenerse $n < my$, de donde $mx < n < my$. Dividiendo por m resulta $x < \frac{n}{m} < y$, y tomando $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, queda demostrado el teorema.

2.5. Si x e y son dos números reales y $x < y$, entonces existe un número irracional ξ tal que $x < \xi < y$.

La demostración la dejamos como ejercicio (ver ejercicio 5).

2.6. Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. El *intervalo cerrado de extremos a, b* se define como el conjunto de los números reales x tales que $a \leq x \leq b$. Se representa por $[a, b]$ y se tiene:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

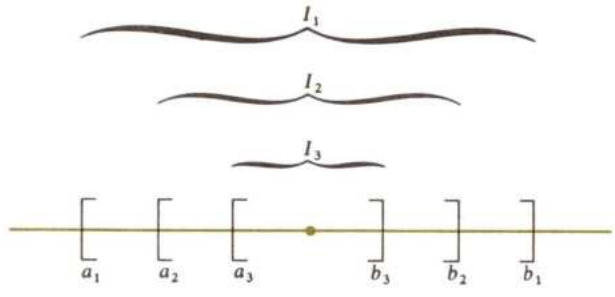
Análogamente se define el *intervalo abierto de extremos a y b* como el conjunto de los números reales x tales que $a < x < b$. Se representa por $]a,b[$, o bien (a,b).

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

A continuación vamos a ver una propiedad que es característica de $\mathbb{R}$ que se conoce como el *principio de los intervalos encajados*.

2.7. *Principio de los intervalos encajados.* Sea I_n, con $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de intervalos cerrados, es decir, $I_n = [a_n, b_n]$ y tales que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ (cada uno contiene al siguiente), y que $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$; entonces existe un único número real r que pertenece a todos los intervalos.

Consideremos los intervalos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, algunos de los cuales están dibujados en la figura 1.



(Fig. 1)

El conjunto de los a_n está acotado superiormente por b_1; por tanto, existe $\sup\{a_n\}$, sea éste r_1. Análogamente, el conjunto de los b_n está acotado inferiormente por a_1; por tanto, existe $\inf\{b_n\} = r_2$.

Sea b_m arbitrario; entonces, para todo n debe ser $a_n \leq b_m$, pues si para algún n fuese $b_m < a_n$, tomando un número natural n_0 mayor que m y n sería $b_{n_0} \leq b_m < a_n \leq a_{n_0}$, contradicción con que siempre es $a_n < b_n$.

Como para todo n, $a_n \leq b_m$, b_m es una cota superior de los a_n; por tanto, $r_1 \leq b_m$. Esto lo hemos hecho para un m arbitrario; por tanto, $r_1 \leq b_m$ para todo m, y de aquí que $r_1 \leq r_2$, por ser r_2 el ínfimo de los b_m.

Veamos ahora que si un elemento ξ pertenece a todos los intervalos, entonces $r_1 \leq \xi \leq r_2$.

En efecto, para todo n se tiene $a_n \leq \xi \leq b_n$, luego $r_1 = \sup\{a_n\} \leq \xi \leq \inf\{b_n\} = r_2$, pues ξ es cota superior de los a_n e inferior de los b_n.

Finalmente vamos a demostrar que $r_1 = r_2$. Si $r_1 \neq r_2$, entonces será $r_2 - r_1 > 0$.

Como $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, tomando $\varepsilon = r_2 - r_1$ existe un número natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $|b_n - a_n| < \varepsilon$, y como $a_n < b_n$, será $b_n - a_n < \varepsilon = r_2 - r_1$. Pero esto no puede suceder por ser $a_n \leq r_1 < r_2 \leq b_n$; por tanto, $r_2 = r_1$.

Se sigue entonces que $r_2 = r_1$ es el único elemento que pertenece a todos los intervalos.

Finalmente vamos a estudiar una propiedad de los números reales que puede resultar útil al estudiar la continuidad de algunas funciones.

2.8. Sea a un número real. Entonces existe una sucesión de números racionales $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

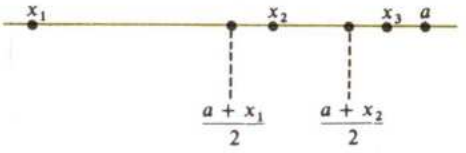
Sea x_1 un número racional menor que a, $x_1 < a$. Como $\dfrac{a + x_1}{2} < a$, por **2.4** existe un número racional x_2 tal que $\dfrac{a + x_1}{2} < x_2 < a$.

Sea ahora $\frac{a + x_2}{2} < a$; por la misma razón existe un número racional x_3 tal que $\frac{a + x_2}{2} < x_3 < a$. Continuando el proceso obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ (ver Fig. 2).

Se tiene: $a - x_2 < a - \frac{a + x_1}{2} = \frac{a - x_1}{2}$

$a - x_3 < a - \frac{a + x_2}{2} = \frac{a - x_2}{2} < \frac{a - x_1}{2^2}$

Y en general, $a - x_n < \frac{a - x_1}{2^{n-1}}$.



(Fig. 2)

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando n_0 tal que $n > n_0$ implique $\frac{a - x_1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, resulta $|a - x_n| < \varepsilon$.

Luego $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

De forma análoga, se tiene:

2.9. Si a es un número real, existe una sucesión de números irracionales cuyo límite es a. La demostración es análoga a la anterior, usando **2.5** en lugar de **2.4**.

Ejercicios:

1. Demostrar que si $x > 0$ es un número real, existe un número natural n tal que $0 < 1/n < x$.
2. Demostrar, utilizando el carácter arquimidiano de $\mathbb{R}$, que si x es un número real tal que $x > 0$, existe un número natural n tal que $\frac{1}{2^n} < x$.
3. Demostrar que si x es un número real mayor que 0, existe un número natural n tal que $n - 1 \leq x < n$.
   (Indicación: Considerar el menor elemento del conjunto $\{m \in \mathbb{N} / x < m\}$ una vez justificado que este conjunto no es vacío.)
4. Demostrar que si x e y son números racionales tales que $x < y$, entonces existe un número irracional ξ tal que $x < \xi < y$.
   (Indicación: Sea α un irracional positivo, por ejemplo, $\sqrt{2}$ ó π. Considerar $\frac{\alpha}{y - x} > 0$ y aplicar la propiedad arquimidiana para demostrar que existe un natural n con $0 < \frac{\alpha}{n} < y - x$, deducir que $x < \frac{\alpha}{n} + x < y$ y comprobar que $\frac{\alpha}{n} + x$ es irracional.)
5. Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que si x e y son números reales con $x < y$, existe un número irracional ξ con $x < \xi < y$.
   (Obsérvese que aquí no se exige, como en el ejercicio anterior, que x e y sean racionales.)
6. Se consideran los intervalos $I = [3, 6]$, $J = [2, 5]$ y $K =]4, 7[$. Encontrar:
   a) $I \cap J$; b) $J \cap K$; c) $J \cup K$; d) $(I \cup J) \cap K$
7. Demostrar el resultado enunciado en **2.9.** (Tener en cuenta la indicación allí dada.)

EJERCICIOS FINALES

1. Demostrar que si x e y son números reales y $0 < x < y$, entonces $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

2. Demostrar que $x < y$ si y sólo si $-y < -x$.

3. Demostrar que si α es una cota superior de $X \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in X$, entonces $\alpha = \sup X$.

4. Encontrar, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

$$A = [0, 1]$$

$$B =]-2, 4[$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 6\}$$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

$$E = \left\{x_n = \frac{n+2}{n-1} \middle| n \in \mathbb{N}, n > 1\right\}$$

5. Sean $X \subset Y$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $X \neq \varnothing$. Demostrar que si Y está acotado se tiene: $\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y$.

6. ¿Qué condición debe cumplir un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ para que $\sup X = \inf X$?

7. Sea X un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$ y sea $a > 0$. Consideremos el conjunto aX definido según $aX = \{ax | x \in X\}$.

   Demostrar.

   i) aX está acotado.

   ii) $\sup(aX) = a \sup X$.

   iii) $\inf(aX) = a \inf X$.

   iv) Si $a < 0$ ¿quién sería $\sup(aX)$ e $\inf(aX)$?

   (Indicación: Ténganse en cuenta ii) y iii).)

DEDEKIND (Richard)

Matemático alemán (1831-1916). Al igual que Weierstrass, formuló una teoría de los números reales, construyendo estos números a partir de los racionales.

TEMA 14 CONTINUIDAD

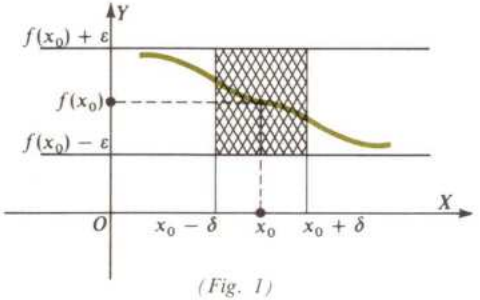
Una de las nociones básicas del Cálculo es el concepto de continuidad, ya estudiado en cursos anteriores. El concepto intuitivo de función continua es el de «aquella función cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel». Esta visión intuitiva es bastante engañosa, como se verá en los ejemplos y ejercicios del tema.

El propósito de este tema es doble: recordar el concepto de continuidad sin insistir en propiedades ya estudiadas en cursos anteriores, que se suponen conocidas, y estudiar las propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado: teoremas de Bolzano, de los valores intermedios y de Bolzano-Weierstrass. Finalmente se dedica un apartado al estudio de la continuidad uniforme (una forma de continuidad más fuerte que la usual) presentando el teorema de Heine, con vistas a su utilización al estudiar el cálculo integral.

1 FUNCIONES CONTINUAS

1.1. *Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un subconjunto D de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. La función f se dice continua en x_0 si para todo número real $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número real $\delta > 0$ (que, en general, depende de ε) tal que $|x - x_0| < \delta$ y $x \in D$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Gráficamente (Fig. 1) esto significa que dada una banda de centro $f(x_0)$ paralela al eje X y de anchura 2ε, existe una banda de centro x_0 paralela al eje Y y de anchura 2δ (para algún δ) tal que la gráfica de f se encuentra en su intersección.



(Fig. 1)

Ejemplos:

- La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2$ es continua en cualquier punto x_0.

  En efecto, sea $\varepsilon > 0$; tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3} > 0$, si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $|x - x_0| < \delta$; entonces

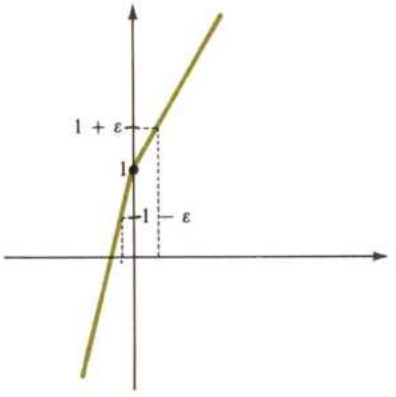
  $$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 2 - 3x_0 + 2| = 3|x - x_0| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

- La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = 0$.

La gráfica de la función es la de la figura 2.
La gráfica induce a pensar que f es continua en $x_0 = 0$. Vamos a demostrarlo. Sea $\varepsilon > 0$; hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| = |x| < \delta$ implique que $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 1| < \varepsilon$.



(Fig. 2)

Ahora bien:

$$|f(x) - 1| = \begin{cases} |3x| = 3|x| & \text{si } x \leq 0 \\ |x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Tomemos $0 < \delta < \min\left(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{3}\right)$; entonces, si $|x| < \delta$

$$|f(x) - 1| = \begin{cases} 3|x| < 3\delta < \varepsilon & \text{si } x \leq 0 \\ |x| < \delta < \varepsilon & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

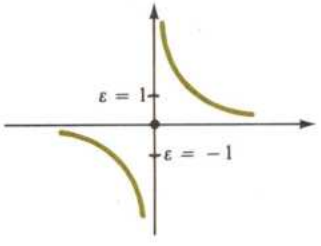
Luego en cualquier caso $|x| < \delta$ implica $|f(x) - 1| < \varepsilon$ y f es continua en $x_0 = 0$.

1.2. Una función que no es continua en x_0 se dice *discontinua en* x_0. Negando la definición de continuidad en x_0, obtenemos el siguiente *criterio de discontinuidad.*

1.3. *Una función* $f: D \to \mathbb{R}$ *es discontinua en* $x_0 \in D$ *si existe un número real* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo número real* $\delta > 0$ *existe un* $x \in D$ *tal que* $|x - x_0| > \delta$ y $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
La gráfica de f aparece en la figura 3.



(Fig. 3)

Está claro que f debe ser discontinua en $x_0 = 0$. Demostrémoslo aplicando el criterio de discontinuidad. Sea $\varepsilon = 1 > 0$, y sea $\delta > 0$ arbitrario; entonces sea x un punto tal que $|x| < \delta$ y $|x| < 1$; se tiene $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > 1 = \varepsilon$; entonces f es discontinua en $x_0 = 0$.

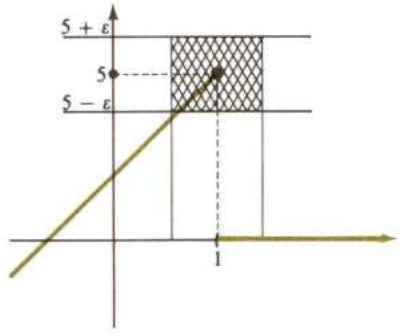
• Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ Entonces f es discontinua en $x_0 = 1$

La gráfica de f (Fig. 4) nos permite suponer que f es discontinua en $x_0 = 1$.

Vamos a demostrarlo utilizando el criterio de discontinuidad.

La función en $x_0 = 1$ vale 5. Observemos que si tomamos una banda de la forma indicada en la figura, entonces para cualquier banda centrada en 1, la parte de la gráfica correspondiente a valores mayores que 1 cae fuera de la intersección. Tomemos, $\varepsilon = 2 > 0$ y sea $\delta > 0$ arbitrario; tomando x tal que $1 < x < 1 + \delta$, entonces: $|f(x) - f(1)| = |0 - 5| = 5 > 2 = \varepsilon$.



(Fig. 4)

1.4. *Una función $f: D \to \mathbb{R}$ es continua en D si es continua en todo punto $x_0 \in D$.*

Ejercicios:

1. De las siguientes funciones, decir cuáles son continuas en $x_0 = 1$.

   a) $f: [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

   b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$

   c) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

   d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2. Estudiar en qué puntos de su dominio son discontinuas las funciones:

   a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x > 0 \\ 3x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

   b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Nota: El lector debe resolver estos ejercicios utilizando la definición **1.1**. Es recomendable dibujar la gráfica de cada una de ellas.

El siguiente criterio de continuidad es con frecuencia de utilidad.

1.5. Sea f: $D \to \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 \in D$. Entonces, si $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria de elementos de D tal que $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$, debe verificarse que $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = f(x_0)$.

Nota: Es conveniente revisar la definición de límite de una sucesión, que se ha estudiado en 2.º de BUP.

Tenemos que demostrar que si $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Supongamos entonces $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x - x_0| < \delta$ debe ser $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Como $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$, dado $\delta > 0$, existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ es $|x_n - x_0| < \delta$, y como los $x_n \in D$, se tiene por lo anterior que $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $n > n_0$, pero esto es precisamente lo que queríamos demostrar.

Resulta de negar **1.5** el siguiente criterio de discontinuidad.

1.6. Sea f: $D \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in D$. Si existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in D$ para todo n, y $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$ y $\lim_{n\to\infty}\{f(x)\} \neq f(x_0)$, entonces f es *discontinua* en x_0.

Ejemplos:

- Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 1 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Es f continua en algún punto de $\mathbb{R}$?

Veamos si f es continua en x_0, con x_0 racional. Sabemos por **2.9** del tema 13 que existe una sucesión $\{x_n\}$ de números irracionales tales que $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$

Como x_n es irracional, $f(x_n) = 1$. Luego la sucesión $\{f(x_n)\}$ es la $\{1, 1, 1, 1, \ldots\}$, cuyo límite es 1. Entonces $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = 1 \neq f(x_0) = 0$ (pues x_0 es racional); por tanto, f no puede ser continua en ningún punto racional por **1.6.**

Sea ahora x_0 irracional; por **2.8** del tema 13 existe una sucesión $\{x_n\}$ de números racionales tal que $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$.

Como $f(x_n) = 0$, se tiene $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = 0 \neq 1 = f(x_0)$ (pues x_0 es irracional). Por tanto, f no puede ser continua en ningún punto irracional.

Nota: Obsérvese que este ejemplo presenta una función que no es continua en ningún punto; esta función se conoce como *función de Dirichlet*.

- Consideremos la función f: $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $(x \neq 0)$. ¿Se puede asignar a f un valor en 0, de tal forma que la función resultante sea continua?

Supongamos que definimos $f(0) = a$, de tal forma que f es continua en 0.

Consideremos la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \ldots, \frac{1}{2\pi n} \ldots\right\}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\pi n} = 0$. Entonces debe ser $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = f(0) = a$.

Como $f(x_n) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{2\pi n}}\right) = \operatorname{sen} 2\pi n = 0$, debe ser $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = 0$; por tanto $a = 0$.

Consideremos ahora la sucesión $\{y_n\}$, donde $y_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$; entonces, $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} = 0$, luego $\lim_{n\to\infty}\{f(y_n)\} = f(0) = a$, pero $f(y_n) = \operatorname{sen}(4n+1)\dfrac{\pi}{2} = 1$, luego $\lim_{n\to\infty}\{f(y_n)\} = 1$, y, por tanto, $a = 1$, pero esto es absurdo; por tanto, no se puede definir $f(0)$ de forma que f sea continua.

Ejercicios:

3. Se considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 - x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demostrar que si $x_0 \neq \dfrac{1}{2}$, f no puede ser continua en x_0. ¿Es f continua en x_0?

4. Encontrar los posibles puntos en los que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es continua. Estudiar la continuidad en estos puntos.

5. Se considera la función $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$, $(x \neq 0)$. ¿Se puede definir $f(0)$ de forma tal que f sea continua en $x_0 = 0$?

2 TEOREMA DE BOLZANO

En el párrafo anterior hemos estudiado la continuidad de funciones definidas sobre un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}$. En éste, vamos a obtener una serie de propiedades que dependen fundamentalmente de:

a) El principio del supremo.
b) La naturaleza del dominio de definición (que será un intervalo cerrado).

2.1. *Lema*: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 \in]a, b[$ (es decir, $a < x - b$); entonces, si $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(x_0)$. Si $x_0 = b$ (respectivamente $x_0 = a$), entonces existe un δ tal que f toma en $]b - \delta, b[$ (respectivamente $]a, a + \delta[$) el mismo signo que $f(x_0)$.

Supongamos $f(x_0)>0$ y sea ε tal que $0>\varepsilon<f(x_0)$. Entonces, $0<f(x_0)-\varepsilon<f(x_0)+\varepsilon$; para este ε, como f es continua en x_0, existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; entonces, $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, de donde $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, y como $0 < f(x_0) - \varepsilon$, se sigue $0 < f(x)$ para $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

2.2. Teorema de Bolzano. *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que f toma valores de signos distintos en los extremos a y b del intervalo.* Entonces *existe un ξ tal que* $a < \xi < b$ *y* $f(\xi) = 0$.

Podemos suponer $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; en el otro caso ($f(a) > 0$ y $f(b) < 0$) se razona exactamente igual.

Sea $X = \{x \in [a, b] / f(x) < 0\}$. X no es vacío, pues $a \in X$, ya que $f(a) < 0$; además, X está acotado superiormente por b, y por el principio del supremo, existe $\sup X$; sea $\xi = \sup X$.

Seguiremos los siguientes pasos:

i) $\xi \in [a, b]$.
ii) $f(\xi)$ no puede ser positivo.
iii) $f(\xi)$ no puede ser negativo.

i) Como ξ es una cota superior de X y $a \in X$, entonces $a \leq \xi$. Como b es una cota de X y el supremo es la menor de todas las cotas superiores, $\xi \leq b$. Resulta entonces $a \leq \xi \leq b$.

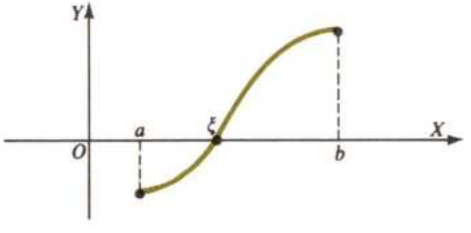
ii) Supongamos $f(\xi) > 0$; entonces, como f es continua, por el lema **2.1** existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in]\xi - \delta, \xi + \delta[= I_\delta$, es $f(x) > 0$; sea entonces $x_0 \in [a, b]$ tal que $\xi - \delta < x_0 < \xi$; entonces, como ξ es el supremo de X y $x_0 < \xi$, debe existir un $x_1 \in X$ tal que $x_0 < x_1 < \xi$, de donde $f(x_1) < 0$, ya que $x_1 \in X$, pero esto no puede ser, pues $x_1 \in I_\delta$, y por tanto, $f(x_1) > 0$.

iii) Supongamos $f(\xi) < 0$; entonces, por el lema **2.1**, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in]\xi - \delta, \xi + \delta[= I_\delta$, es $f(x) < 0$; pero entonces, tomando $x_0 \in [a, b]$ tal que $\xi < x_0 < \xi + \delta$, sería $f(x_0) < 0$ y $\xi < x_0$, pero esto no puede suceder porque $x_0 \in [a, b]$ y $f(x_0) < 0$ implican $x_0 \in X$ y ξ es el supremo de X.

Resulta entonces de ii) y iii) que $f(\xi) = 0$.

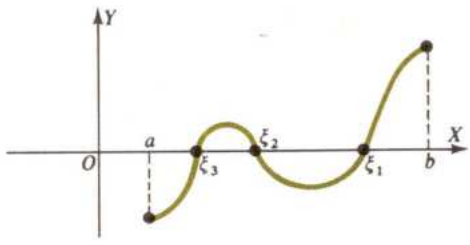
Como $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, no puede ser $\xi = a$ ni $\xi = b$; luego $a < \xi < b$ y $f(\xi) = 0$.

Observaciones: i) El teorema de Bolzano traduce en lenguaje del cálculo el hecho geométrico de que una curva continua que tiene sus extremos en distintos semiplanos respecto del eje OX debe cortar al eje X (Fig. 5).

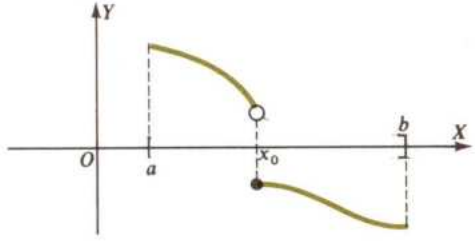


(Fig. 5)

ii) El teorema de Bolzano asegura la existencia de tal ξ, pero no implica que ξ sea único, como se puede observar en la figura 6.



(Fig. 6)



(Fig. 7)

iii) Sin la hipótesis de la continuidad de f, el teorema de Bolzano puede ser falso, como indica la figura 7.

$f(a) > 0$
$f(b) < 0$ (f no es continua en x_0)
$f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$

2.3. Teorema de los valores intermedios. *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; entonces f toma todo valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.*

Podemos suponer $f(a) < f(b)$. Si $f(a) = f(b)$, el único valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es $f(a)$, que se toma en el punto a. Si $f(b) < f(a)$, la demostración es análoga a la que sigue:

Sea $f(a) < c < f(b)$. Consideremos la función g definida por $g(x) = f(x) - c$; como f es continua en $[a, b]$, g es continua en $[a, b]$; por otra parte:

$$g(a) = f(a) - c < 0$$
$$g(b) = f(b) - c > 0$$

Por el teorema de Bolzano existe un ξ tal que $a < \xi < b$ y $g(\xi) = 0$, es decir, $f(\xi) - c = 0$; luego $f(\xi) = c$.

Ejemplos:

- Vamos a demostrar que la ecuación $x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ tiene solución.

  Consideremos la función $f(x) = x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}$; entonces, $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi - 1}{2} > 0$.

  Como f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se sigue del teorema de Bolzano que existe un ξ que verifica $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ tal que $f(\xi) = 0$, es decir, $\xi \operatorname{sen} \xi - \frac{1}{2} = 0$, de donde ξ es solución de la ecuación dada.

- Vamos a demostrar que existe un número real x solución de la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$.

  Consideremos la función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$. Se tiene $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -3 < 0$; luego, por el teorema de Bolzano, como f es continua en $[0, 1]$, existe un ξ con $0 < \xi < 1$ tal que $f(\xi) = 0$, es decir, $2\xi^3 - 6\xi + 1 = 0$.

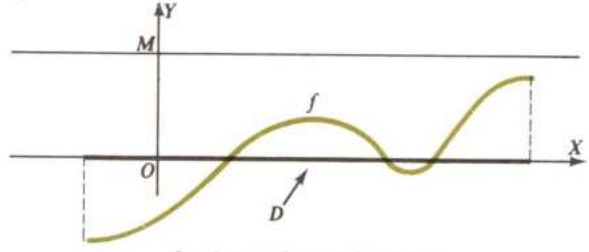
Ejercicios;

1. Con el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $\cos x - 2x + 1 = 0$ tiene solución.
2. Demostrar que todo número positivo c tiene una raiz n-ésima positiva (n = número natural). (Indicación: Aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^n - c$. Distinguir los casos $c = 1$ y $c > 1$.)
3. Demostrar que la función polinómica $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 3x + 2$ tiene al menos un cero, es decir, un punto ξ tal que $f(\xi) = 0$.
4. Sea f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$, y tal que para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que $f(x) \in]0, 1[$. Demostrar que existe un ξ tal que $0 < \xi < 1$ y $f(\xi) = \xi$.
5. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demostrar que sus gráficas se cortan.

3 CONTINUIDAD Y ACOTACIÓN

3.1. Como se recordará de cursos anteriores, una función f: $D \to \mathbb{R}$ se dice *acotada superiormente* si existe un número M tal que para todo $x \in D$, $f(x) < M$.

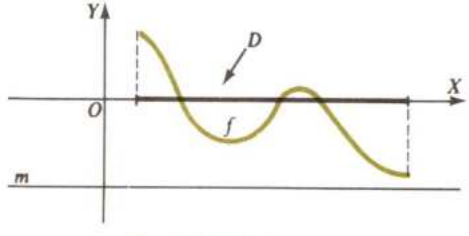
Gráficamente, decir que f está acotada superiormente en D significa entonces que existe una recta paralela al eje OX tal que la gráfica de la función se encuentra por debajo de dicha recta (Fig. 8).



f está acotada superiormente

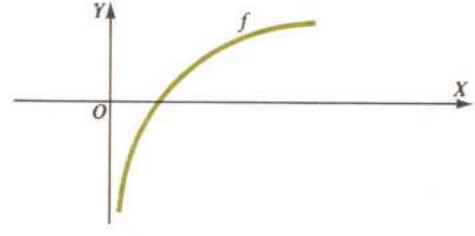
(Fig. 8)

Análogamente, f: $D \to \mathbb{R}$ está *acotada inferiormente* si existe un número real m tal que $m < f(x)$ para todo $x \in D$ (ver Figs. 9 y 10).



f acotada inferiormente

(Fig. 9)

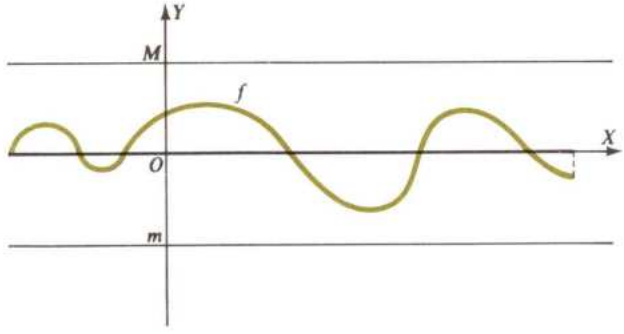


f no acotada inferiormente

(Fig. 10)

3.2. $f;\ D \to \mathbb{R}$ se dice *acotada* si está acotada superior e inferiormente. Esto quiere decir que existen números reales m y M tales que para todo $x \in D$, $m < f(x) < M$.

Geométricamente, esto significa que existen dos rectas paralelas al eje OX tales que la gráfica de f queda comprendida en la banda determinada por dichas rectas (Fig. 11).



(Fig. 11)

3.3. *Sea* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $x_0 \in]a, b[$; *entonces, existe un intervalo* $I_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *en el que* f *está acotada.*

Sea $\varepsilon = 1$; entonces, como f es continua en x_0, debe existir un $\delta < 0$ tal que si $x \in [a, b]$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Tomando $I_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, resulta que si $x \in I_\delta$, entonces $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$, es decir, $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$. Tomando $m = f(x_0) - 1$ y $M = f(x_0) + 1$, resulta que f está acotada en I_δ.

Este resultado asegura que toda función continua en x_0 está acotada en las «proximidades» de x_0, pero ¿qué tamaño tiene el conjunto en el que f está acotada? El teorema **3.4** nos asegura que cuando f es continua en $[a, b]$, entonces el conjunto en que f está acotada es el más grande posible, es decir, $[a, b]$.

Si $x_0 = a$, entonces el intervalo I_δ debe tomarse como $[a, a + \delta[$, y si $x_0 = b$, $I_\delta =]b - \delta, b]$.

3.4 *Sea* f *una función continua en* $[a, b]$; *entonces,* f *está acotada en* $[a, b]$.

Sea $X = \{x \in [a, b] / f \text{ está acotada en } [a, b]\}$. A fin de poder aplicar en X el principio del supremo, tenemos que demostrar que X no es vacío y que está acotado superiormente.

X no es vacío. Como f es continua en a, por **3.3** existe un intervalo I_δ en el que f está acotada; sea $c \in I_\delta$; entonces, f está acotada en $[a, c]$, luego $c \in X$, y por tanto, X no es vacío.

X está acotado superiormente. En efecto, b es una cota superior de X. Sea entonces $\alpha = \sup X$. El teorema estará demostrado si probamos que $\alpha = b$.

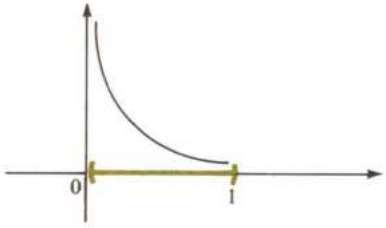
Como b es una cota superior de X, se tiene $\alpha \leq b$. Si fuese $\alpha < b$, como f es continua en α, existiría un $I_\delta = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, en el que f está acotada. Sea $\alpha - \delta < r < \alpha$ y $\alpha < s < \alpha + \delta$; entonces:

f está acotada en $[a, r]$ por ser $r < \alpha$.
f está acotada en $[r, s]$ pues $[r, s] \subset I_\delta$.

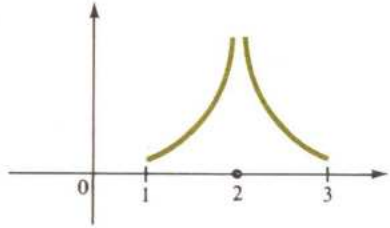
Luego f está acotada en $[a, s]$, pero $s > \alpha$, y esto contradice el hecho de ser α el supremo de X. Por tanto, $\alpha = b$.

Resulta entonces que f está acotada en $[a, x]$ para $x \leq b$, y, por tanto, en $[a, b]$.

Notas: Si el dominio de la función *no* es un intervalo cerrado, el resultado **3.4** no tiene por qué verificarse. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es continua en (0, 1), y, sin embargo, no está acotada (Fig. 12).



(Fig. 12)



(Fig. 13)

Si la función f *no* es continua, el resultado puede no ser cierto. Por ejemplo, la función f de la figura 13 no está acotada (no es continua en $x_0 = 2$).

4 TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

4.1. *Si una función f es continua en $[a, b]$, entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(\xi)$.*

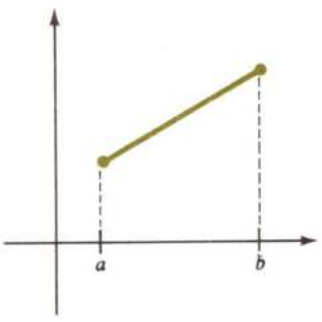
Sea $X = \{f(x)/x \in [a, b]\}$; evidentemente, X no es vacío. Por **3.4**, X está acotado, en particular está acotado superiormente; por tanto, por el principio del supremo existe $\alpha = \sup X$.

Tenemos que demostrar que existe un $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \alpha$. Supongamos que no fuese así; entonces, para todo $x \in [a, b]$ es $f(x) \neq \alpha$. Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$; entonces, g es continua en $[a, b]$, pues es el cociente de dos funciones continuas y el denominador nunca se anula en $[a, b]$. Luego por **3.4**, g deberá estar acotada en $[a, b]$.

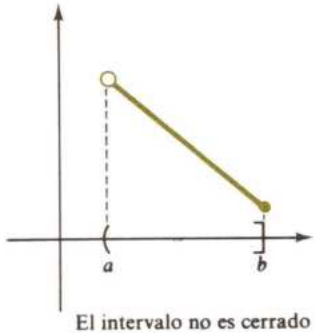
Veamos que esto es falso.

Sea $M > 0$ cualquier número real positivo y tomemos $\varepsilon = \dfrac{1}{M} > 0$. Entonces, por **1.4** del tema 13, existe un $f(x)$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha$; luego $\alpha - f(x) < \varepsilon$, de donde $\dfrac{1}{\varepsilon} < \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$, es decir, $M < g(x)$; por tanto, g se puede hacer mayor que cualquier número real y g no está acotada en $[a, b]$. Resulta así una contradicción, y, por tanto, debe existir un $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \alpha$. Como $\alpha = \sup X$, se tiene para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq \alpha = f(\xi)$.

Este teorema asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza en él su valor máximo. Este valor puede ser alcanzado en los extremos del intervalo, como sucede en la función de la figura 14.

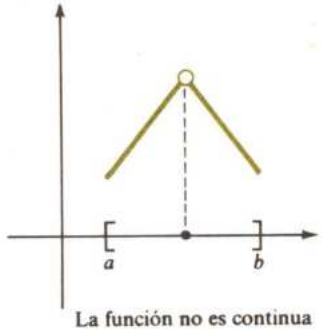


(Fig. 14)



El intervalo no es cerrado

(Fig. 15)



La función no es continua

(Fig. 16)

Observemos la necesidad de las hipótesis (Figs. 15 y 16).

4.2. *Sea f una función continua en $[a, b]$; entonces, existe un $\xi \in [a, b]$ tal que para todo $x \in [a, b]$, $f(\xi) \leq f(x)$.* Es decir, *si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un mínimo absoluto en $[a, b]$.*

La demostración de este teorema que nos asegura que f alcanza su valor mínimo es análoga a la de **4.1** y se deja como ejercicio.

4.3. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua; entonces, su imagen es un punto o un intervalo cerrado.

Si f es constante su imagen sería un punto. Si f no constante, entonces, por **4.1** y **4.2** existen ξ_1 y ξ_2 tales que para todo $x \in [a, b]$, $f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$; luego la imagen de f es el intervalo $[f(\xi_1), f(\xi_2)]$, por el teorema de los valores intermedios aplicado a $[\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$.

Ejercicios:

1. Indicar cuáles de las siguientes funciones está acotada en su correspondiente dominio de definición:

   a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

   b) $f\colon [-8, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(x)$
   ($E(x)$ = parte entera de x)

   c) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

   d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{2 + x^2}$

   e) $f\colon [3, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

   f) $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

2. Hallar una cota superior e inferior de $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ y encontrar en qué valores de x alcanza el valor máximo y mínimo.

---

5 CONTINUIDAD UNIFORME

5.1. En este apartado vamos a estudiar una propiedad relativa a las funciones que se conoce con el nombre de *continuidad uniforme*. Es una propiedad «más fuerte» que la continuidad ya estudiada, en el sentido de que toda función uniformemente continua es continua, aunque el recíproco no se verifica en general. El resultado principal es el teorema de Heine (**5.8**), que se utilizará al estudiar la existencia de la integral de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

5.2. Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 5$. La función f es continua en todos los puntos.

Supongamos $a_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces, si $|x - x_0| < \delta$ resulta $|f(x) - f(x_0)| =$ $= |3x - 5 - 3x_0 + 5| = 3|x - x_0| < \varepsilon$. Esto demuestra que f es continua en x_0, y además podemos observar que fijado ε, el correspondiente δ depende de ε, pero no del punto x_0 donde estamos estudiando la continuidad.

Consideremos ahora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Se sabe que f es continua. Tomemos el punto $x_0 = 0$ y $\varepsilon = 1$. Entonces, si $\delta = 1$, tenemos que $|x - 0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2 = 1 = \varepsilon$.

Si queremos ahora estudiar la continuidad en $x_0 = 2$ y tomamos el mismo $\varepsilon = 1$, el δ obtenido anteriormente no nos vale, ya que si $|x - x_0| < 1$, es decir, $|x - 2| < 1$, entonces debería ser $|f(x) - f(2)| < 1$, es decir, $|x^2 - 4| < 1$, pero para $x = 2{,}5$ se tenía $|2{,}5 - 2| < 1$ y $|f(2{,}5) - f(2)| = |6{,}25 - 4| = 2{,}25 > \varepsilon$.

Estas observaciones nos conducen a establecer la siguiente definición.

5.3. Una función $f: D \to \mathbb{R}$ se dice *uniformemente continua en* D si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo x, $x' \in D$ tales que $|x - x'| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Obsérvese que así como se hablaba de continuidad en un punto, no tiene sentido hablar de continuidad uniforme en un punto; *la propiedad de continuidad uniforme es relativa al dominio de la función.*

5.4. Veamos ahora que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua, lo cual ya hemos visto de manera informal en el ejemplo anterior.

Si f fuese uniformemente continua dado $\varepsilon = 1$, debería existir un $\delta > 0$ tal que si $x, x' \in \mathbb{R}$ y $|x - x'| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x')| < 1$.

Tomemos $x = \frac{1}{\delta}$ y $x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$; entonces, si $x, x' \in \mathbb{R}$ y $|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$ entonces debería ser $|f(x) - f(x')| < 1$, pero $|f(x) - f(x')| = \left|\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} - \frac{\delta^2}{4} - 1\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$, lo que es una contradicción y, por tanto, f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

5.5. Una función puede no ser uniformemente continua en su dominio, pero sí serlo en un cierto subconjunto de dicho dominio.

Por ejemplo, la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ *no* es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, pero sí lo es en $[0, 2]$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{4}$; entonces, si $x, x' \in [0, 2]$ y $|x - x'| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |x - x'||x + x'|$, y como $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq x' \leq 2$, se tiene $0 \leq x + x' \leq 4$, luego $|x + x'| \leq 4$ y $|f(x) - f(x')| < \delta \cdot 4 < \dfrac{\varepsilon}{4} 4 = \varepsilon$.

5.6. Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en D, entonces f es continua en D y además, fijado $\varepsilon > 0$, el δ correspondiente no depende del punto $x_0 \in D$.

En efecto, sea $x_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$; entonces existe un $\delta > 0$ tal que $x, x' \in D$ y $|x - x'| < \delta$ implican $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Tomando $x' = x_0$, resulta el teorema.

El propósito de este apartado es estudiar la continuidad uniforme de una función cuando el dominio es un intervalo cerrado $[a, b]$ (teorema de Heine). Para ello vamos a dar un lema previo.

5.7. *Lema: Sea* $[a, b]$ *un intervalo cerrado que está contenido en la unión de una familia de intervalos abiertos* $]\alpha_i, \beta_i[$; *entonces existe un conjunto finito de dichos intervalos tales que* $[a, b]$ *está contenido en su unión.*

Supongamos que $[a, b] \subset \cup]\alpha_i\ \beta_i[$ y que el lema no es cierto; dividamos el intervalo $[a, b]$ en dos intervalos iguales $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ y $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. Entonces:

$$[a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \subset \cup]\alpha_i, \beta_i[$$

De estos dos intervalos, uno al menos no está contenido en la unión de un número finito de $]\alpha_i, \beta_i[$, pues si no lo estaría la unión $[a, b]$. Sea I_1 tal intervalo. Dividiendo I_1 en dos partes iguales, uno de los intervalos resultantes no estará contenido en la unión de un número finito de $]\alpha_i, \beta_i[$, y sea éste I_2; procediendo por inducción obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$; además, si $I_n = [a_n, b_n]$, entonces $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, luego $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Por el principio de los intervalos encajados existe un $\xi \in I_n$ para todo n. Además, por nuestra forma de construir los I_n, ninguno de ellos está contenido en una unión finita de los intervalos $]\alpha_i, \beta_i[$.

Evidentemente, $\xi \in [a, b]$, luego para algún j, $\xi \in]\alpha_j, \beta_j[$, pero como la longitud de los intervalos tiende a cero, se puede elegir un n suficientemente grande tal que $I_n \subset]\alpha_j, \beta_j[$, pero entonces I_n está contenido en una unión finita de intervalos $]\alpha_i, \beta_i[$, concretamente en la unión de un solo intervalo $]\alpha_j, \beta_j[$. Esto, sin embargo, es una contradicción con la propiedad de los I_n. Se sigue entonces que el lema debe ser cierto.

5.8. Teorema de Heine. *Toda función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *es uniformemente continua en* $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$; para cada $x_0 \in [a, b]$, como f es continua en x_0, existe un $\delta_{x_0} > 0$ tal que $|x - x_0| < \frac{\delta_{x_0}}{2}$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Consideremos los intervalos abiertos $\left(x_0 - \frac{\delta_{x_0}}{2}, x_0 + \frac{\delta_{x_0}}{2}\right)$; entonces, $[a, b]$ está contenido en la unión de estos intervalos. Por el lema anterior, $[a, b]$ está contenido en la unión de un número finito de estos intervalos, por ejemplo:

$$[a, b] \subset \left(x_1 - \frac{\delta_{x_1}}{2}, x_1 + \frac{\delta_{x_1}}{2}\right) \cup \cdots \cup \left(x_n - \frac{\delta_{x_n}}{2} \; ; x_n + \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$$

Sea δ el menor de los números $\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}$, y sean $x, x' \in [a, b]$ con $|x - x'| < \delta$. Como $x \in [a, b]$, existe un k tal que $x \in \left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2}\right)$, y, por tanto, $|x_k - x| < \frac{\delta_{x_k}}{2}$; entonces, $|x_k - x'| \leq |x_k - x| + |x - x'| < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \delta < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k}$.

De aquí que $x' \in \left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2}\right)$ y, por tanto, por la construcción de los intervalos $|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ y f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Ejercicios:

1. ¿Es uniformemente continua la función $f(x) = x^2$ en $[3, 5]$?
   (Nota: No utilizar el teorema de Heine.)
2. ¿Es uniformemente continua la función anterior en $]2, 4[$?
3. ¿Es uniformemente continua la función f: $]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$?
4. ¿Se verifica el lema **5.7** si sustituimos el intervalo $[a, b]$ por todo $\mathbb{R}$?

EJERCICIOS FINALES

1. Estudiar la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3|x| + 5$.

2. ¿Es continua en algún punto la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es irracional?} \end{cases}$$

3. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 6 - x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en exactamente dos puntos y encontrar éstos.

4. Dar un ejemplo de una función tal que la imagen de un intervalo cerrado no sea un intervalo cerrado. ¿Puede una tal función ser continua?

5. Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que vale 4 en todos los números racionales. Si f es continua, ¿quién es f?

6. Demostrar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. (Indicación: Se estudiará el signo del polinomio para valores positivos y negativos suficientemente grandes, en función del signo del coeficiente principal.)

7. ¿Existe algún número real a tal que la ecuación $6x^5 + 2x + a = 0$ tenga dos soluciones distintas?

8. Sea $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(2\pi)$.

Demostrar que existe $x \in [0, \pi]$ tal que $f(x) = f(x + \pi)$. Deducir que si se supone continua la distribución de la temperatura en los distintos puntos de la Tierra, entonces existen siempre dos puntos antipodales en el ecuador de la Tierra que tienen la misma temperatura.

9. Sea $P(x) = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polinomio tal que a_n y a_0 tienen signos opuestos. Demostrar que tiene, al menos, una raíz positiva.

10. Encontrar cuatro intervalos disjuntos en los que la ecuación $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ tenga una raíz.

11. Sea $f\colon \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La función verifica $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$. Sin embargo, $f(x) \neq 0$ para todo x. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

12. ¿Es la composición de dos funciones uniformemente continuas, uniformemente continua? ¿Y la suma? ¿Y el producto?

BOLZANO (Bernardo)

Filósofo, lógico y matemático checo, de origen italiano (1781-1848). Fue un sacerdote católico que hizo aportaciones importantes a las matemáticas en la primera mitad del siglo XIX. Sus demostraciones referentes a la continuidad fueron publicadas en su importante obra póstuma *Paradojas del infinito*.

DIRICHLET (Peter Gustav Lejeune)

Matemático alemán (1805-1859). Fue alumno de Gauss, al que sucedió como profesor en Gotinga.

Representa, con Rieman, el planteamiento riguroso de muchos problemas de análisis. Demostró la imposibilidad de la relación de Fermat para el exponente 5 (ver biografía de Fermat, tema 25).

HEINE (Eduard)

Matemático alemán (1821-1881). Realizó investigaciones sobre las funciones continuas y sobre sistemas discretos de elementos y su medida.

WEIERSTRASS (Karl)

Matemático alemán (1815-1897). Como Dedekind y Cantor, contribuyó al desarrollo de la teoría de números reales. Fue uno de los primeros en darse cuenta de que la integración de una serie de funciones término a término no siempre es posible.

TEMA 15 FUNCIONES DERIVABLES

Como ya se ha indicado, uno de los problemas básicos del cálculo es la determinación de la tangente en un punto de una curva. El concepto matemático que resuelve este problema es el de derivada de una función en un punto.

Este tema está dedicado fundamentalmente a estudiar las propiedades de las funciones derivables en un intervalo $]a, b[$ (con la hipótesis adicional de continuidad en $[a, b]$), que da lugar a los teoremas de Rolle, valor medio y Cauchy, que tienen una interpretación gráfica muy intuitiva.

Previamente, y con objeto de afianzar conceptos, se recuerdan algunas de las propiedades básicas de la derivada, así como sus interpretaciones geométricas (tangente) y físicas (variación de una magnitud).

1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1.1. *Sea f: $]a, b[\to \mathbb{R}$ una función y sea $x_0 \in]a, b[$. Se dice que f es derivable en x_0 si existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si f es derivable en x_0, este límite se llama la *derivada de f en x_0* y se representa por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad [1]$$

Si llamamos x al punto $x_0 + h$, entonces $h = x - x_0$ tiende a cero si y sólo si x tiende hacia x_0. Esto nos permite escribir [1] en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ejemplos:

- Sea f: $[1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x - 5}$; veamos si f es derivable en $x_0 = 2$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{2h - 1} + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h(2h - 1)} = -2$$

  Luego f es derivable en $x_0 = 2$ y $f'(2) = -2$.

- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

  Veamos si f es derivable en $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cos\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \cos\frac{1}{h}$$

  Ahora bien, como $\left|\cos\frac{1}{h}\right| \leq 1$ y h tiende a cero, entonces $\lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h} = 0$, y por tanto, f es derivable en $x_0 = 0$ y $f'(0) = 0$.

1.2. Una función $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ se dice *derivable en* $]a, b[$ si f es derivable en todo punto $x_0 \in]a, b[$, es decir, si para todo $x_0 \in]a, b[$, existe $f'(x_0)$.

Ejemplo:

- Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 1|$. Esta función puede también escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

  Veamos si f es derivable en $x_0 = -1$. Tenemos que estudiar si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1 + h)}{h}$$

  Para estudiar este límite, calculamos los límites por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1 + h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1 + h + 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1 + h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 - h - 1}{h} = -1$$

  Luego como estos límites son distintos, no existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(-1 + h)}{h}$ y f *no* es derivable en $x_0 = -1$.

  Luego f no es derivable en ningún intervalo que contenga a -1.

Ejercicios:

1. Hallar la derivada en $x_0 = 1$ de la función $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.
2. Calcular, si existe, la derivada en $x_0 = 0$ de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. La misma pregunta que en el ejercicio 2 para la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x^2 - 10x$. ¿Existe algún punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$?

---

2 DERIVADAS LATERALES

2.1. *Sea* $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ y $x_0 \in]a, b[$. *Se dice que* f *es derivable en* x_0 *por la derecha si existe*:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad [1]$$

y que f *es derivable en* x_0 *por la izquierda* si existe:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad [2]$$

Los límites [1] y [2] se llaman *derivadas laterales de* f *en* x_0 *por la derecha y por la izquierda*, respectivamente.

2.2. Si f está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se puede estudiar la existencia de la derivada lateral por la derecha en $x_0 = a$ y la existencia de la derivada lateral por la izquierda en $x_0 = b$, al estudiar la existencia de los límites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$$

Una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *derivable en* $[a, b]$ si es derivable en todo $x_0 \in]a, b[$ y si existen las derivadas laterales por la derecha en a y por la izquierda en b.

2.3. La derivada lateral por la derecha en x_0 se representa por $f'_+(x_0)$ y por la izquierda por $f'_-(x_0)$. Resulta entonces que f es derivable en x_0 si y sólo si existen $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. En este caso $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Ejemplo:

- Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$; entonces:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Luego $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, y, por tanto, f no es derivable en $x_0 = 0$.

Ejercicios:

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 1|$.

   Calcular $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$. ¿Es f derivable en $x_0 = 0$?

   Calcular también $f'_+(-1)$ y $f'_-(-1)$. ¿Es f derivable en $x_0 = -1$?

2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 3 \text{ si } x > 0 \\ x^2 + 3 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

¿Es f derivable en $x_0 = 0$?

3. Hallar las derivadas laterales de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x^2 - 1|$ en los puntos $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$. ¿En cuáles de estos puntos es f derivable?

3 FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

3.1. Sea $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$. Sabemos que para todo $x_0 \in]a, b[$ existe $f'(x)$. Esto permite definir una función $Df:]a, b[\to \mathbb{R}$ que haga corresponder a cada $x \in]a, b[$ su derivada $f'(x)$. Esta función se llama la función *derivada de f* y se representa por Df.

Así: $Df:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow (Df)(x) = f'(x)$$

Nota: Si utilizamos la notación $y = f(x)$, es frecuente y cómodo utilizar para la función derivada la notación $y' = f'(x)$.

En este caso, si $x_0 \in]a, b[$, entonces $(Df)(x_0)$ se escribe y'_{x_0} o $y'(x_0)$.

Otra notación para la derivada de la función $y = f(x)$, usada con frecuencia, es la debida a Leibniz, que se escribe $Df = \dfrac{df}{dx}$ o $\dfrac{dy}{dx}$.

En este caso, $(Df)(x_0)$ se escribe $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_0}$ o $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x_0}$.

Esta notación, muy manejable, presenta, sin embargo, el inconveniente de que puede confundirse con un cociente.

Conviene insistir en que $\dfrac{df}{dx}$ no es un cociente, sino una notación para la función que asocia a cada $x_0 \in]a, b[$ la derivada de f en x_0.

Ejemplo:

- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 + 2$.

  Veamos que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea x un punto de $\mathbb{R}$:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x + h)^2 + 2 - (3x^2 + 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

  Resulta entonces que f es derivable en $\mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}$ la derivada es $f'(x) = 6x$; luego la función derivada es:

$$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f'(x) = 6x \quad \text{o} \quad y' = 6x$$

3.2. Si $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ es una función derivable, la función derivada $f':]a, b[\to \mathbb{R}$ puede a su vez ser derivable en $]a, b[$; en este caso la derivada de f' en $x_0 \in]a, b[$ se dice la *derivada segunda de f en* x_0 y se escribe $f^{(2)}(x_0)$ o, en notación de Leibniz,

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0}$$

Ejemplo:

- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 + 2$. En el ejemplo anterior vimos que f era derivable en $\mathbb{R}$ y la función derivada era $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f'(x) = 6x$. De las propiedades estudiadas en cursos anteriores (o bien directamente de la definición de derivada) sabemos que f' es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es 6, luego la derivada segunda de f' es la función

$$f^{(2)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f^{(2)}(x) = 6$$

3.3. Si f' es derivable en todo punto de $]a, b[$, entonces f se dice *dos veces derivable* en $]a, b[$.

De forma análoga, si $f^{(2)}$ es derivable en $]a, b[$, entonces su función derivada se dice la *derivada tercera de f* y se representa por $f^{(3)}$, y así sucesivamente.

Ejemplo:

- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$; entonces, de las fórmulas ya estudiadas de derivación del seno y coseno se deduce:

$$f'(x) = \cos x,\ f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x,\ \ldots$$

Ejercicios:

1. Hallar, si existen, las cinco primeras derivadas de $f(x) = 7x^6 + 4x^2 - 1$.
2. Hallar las seis primeras derivadas de $f(x) = \cos x$.
3. Dada la función $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 1$, hallar $f^{(1)}(0)$, $f^{(2)}(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$ y $f^{(5)}(0)$.
4. Sea $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = Lx$. Encontrar $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ y $f^{(4)}(x)$.
5. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x + 2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

   a) Representar la función f.
   b) Hallar $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$.
   c) ¿Es f derivable en $x = 0$?

6. Hallar las cuatro primeras derivadas de la función $f(x) = \cos x$.
7. Dada la función $f(x) = |x - 2|$

   a) Representarla gráficamente.
   b) Hallar $f'_+(2)$ y $f'_-(2)$.
   c) ¿Es f derivable en $x = 2$?

CUADRO RESUMEN DE DERIVADAS

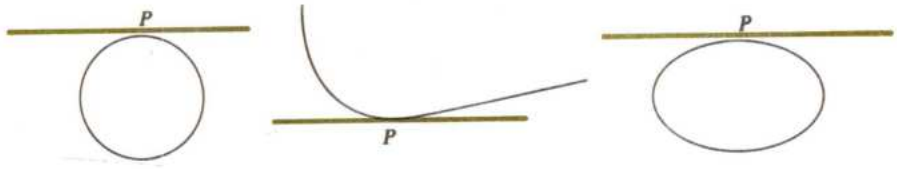
Funciones	Derivadas	Funciones	Derivadas
x^a, $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
u^m, $m \in \mathbb{R}$	$mu^{m-1} \cdot u'$	$\cot u$	$-\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
Lx	$\dfrac{1}{x}$	$\sec x$	$\sec x \cdot \operatorname{tg} x$
Lu	$\dfrac{u'}{u}$	$\sec u$	$u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
$\log_a^x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$	$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
$\log_a u$	$\dfrac{u'}{u}\log_a e$	$\operatorname{cosec} u$	$-u' \operatorname{cosec} u \cdot \cot u$
a^x	$a^x La$	arc sen x	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
a^u	$a^u \cdot u' La$	arc sen u	$\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
e^x	e^x	arc cos x	$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	arc cos u	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cdot \cos u$	arc tg x	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	arc tg u	$\dfrac{u'}{1 + u^2}$
$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$	arc cot x	$\dfrac{-1}{1 + x^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	arc cot u	$\dfrac{-u'}{1 + u^2}$
$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$	$\begin{cases} y = f(x) \\ z = Ly \end{cases}$	$y' = y \cdot z'$

4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

4.1. Uno de los problemas que dio origen al estudio del cálculo diferencial es el de la determinación de la tangente a una curva en uno de sus puntos.

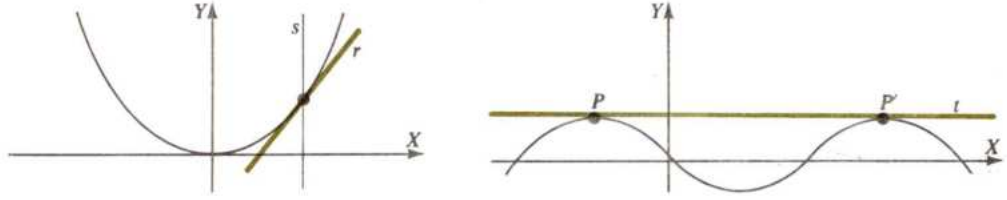
Aunque el concepto de recta tangente es bastante intuitivo, cuando se trata de precisarlo formalmente surgen dificultades; por ejemplo, en una primera aproximación podríamos definir la tangente a una curva en uno de sus puntos, P, como una recta que pasando por P cortase a dicha curva solamente en el punto P.

En casos como los de la figura 1, parece que esta definición puede ser buena.



(Fig. 1)

Si consideramos las curvas de la figura 2, en la primera de ellas las dos rectas, r y s, cumplen la propiedad de cortar a la curva solamente en un punto P, y, no obstante, así como la recta r puede acomodarse a nuestro concepto intuitivo de tangente, no sucede así con s.

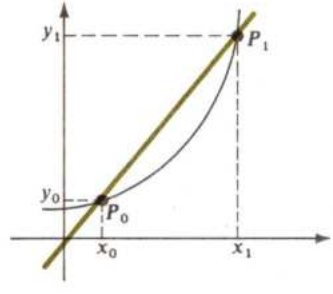


(Fig. 2)

Por otra parte, en la segunda curva de la figura 2, la recta t responde a nuestro concepto intuitivo de tangente y, sin embargo, tiene dos puntos en común con la curva: P y P'.

4.2. Una forma de llegar a expresar de manera formal el concepto de tangente es la de considerar la tangente como límite de las secantes a la curva que pasan por P.

Consideremos, en un sistema de ejes cartesianos rectangulares, la curva correspondiente a la gráfica de la función continua $y = f(x)$, como se indica en la figura 3.



(Fig. 3)

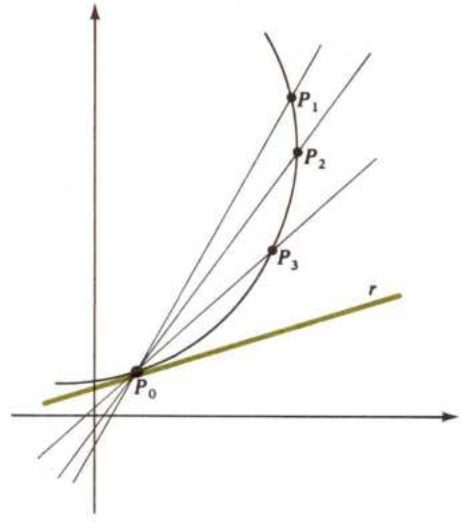
Sea P_1 un punto de dicha curva distinto de P_0 y sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) las coordenadas de P_0 y P_1, respectivamente.

La ecuación de la recta secante que pasa por P_0 y P_1 es

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \text{ cuya pendiente es } m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

¿Qué sucede cuando el punto P_1 se mueve sobre la curva aproximándose a P_0?

La figura 4 nos ilustra esta situación y nos muestra cómo las sucesivas secantes P_0P_1, $P_0P_2, \ldots, P_0P_n$ se van aproximando cada vez más a la tangente en el punto P_0 según nuestro concepto intuitivo de tangente.



(Fig. 4)

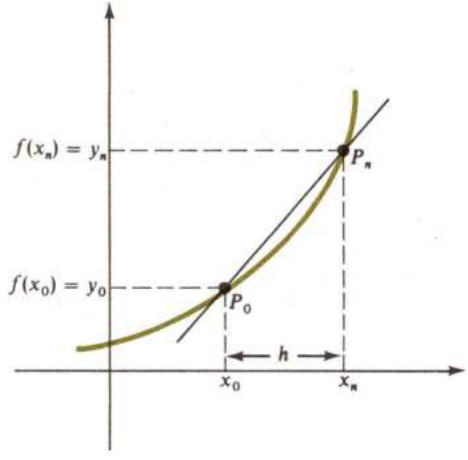
Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), la pendiente de la secante P_0P_n es

$$m_n = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

Parece, pues, lógico definir la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P_0 = (x_0, y_0)$ como la recta que pasa por P_0 y cuya pendiente es el límite de las pendientes de las secantes que pasan por P_0 y por un punto variable P_n cuando P_n se aproxima a P_0.

Vamos a precisar más: ¿Qué significa que P_n se aproxima a P_0?

En la figura 5 vemos que si P_n es un punto de la curva, P_n tiene de abscisa $x_n = x_0 + h$ para un h conveniente (concretamente, $h = x_n - x_0$); además, si $P_n \neq P_0$, entonces $h \neq 0$, luego decir que P_n se aproxima a P_0 significa que h tiende a cero, o, lo que es lo mismo, toma valores próximos a cero, ya que la función f se ha supuesto continua.



(Fig. 5)

Por tanto, la pendiente de la tangente a $y = f(x)$ en $P_0 = (x_0, y_0)$ será:

$$m = \lim_{n \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y_0}{h}, \text{ donde } \Delta y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

4.3. De lo anteriormente dicho se deduce que la tangente a $y = f(x)$ en $P_0 = (x_0, y_0)$ tiene por ecuación: $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, luego la derivada de f en x_0 es precisamente la pendiente de la tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplos:

- Consideremos la curva $y = f(x) = x^2$; entonces, la pendiente de la tangente en $P = (2, 4)$ será:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h} = 4$$

- Sea ahora la curva $y = 3x^2 - 8x + 2$. ¿En qué punto la pendiente de la tangente valdrá 4?

  Sea $P = (x_0, y_0)$ dicho punto; entonces:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x_0 + h)^2 - 8(x_0 + h) + 2] - (3x_0^2 - 8x_0 + 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6x_0h - 8h}{h} = 6x_0 - 8$$

  Como $m = 4$, deberá ser $6x_0 - 8 = 4$; luego $x_0 = 2$, y, por tanto, $y_0 = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 2 = -2$, por lo que el punto será $P = (2, -2)$.

Ejercicios:

1. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $y = x^6 - 5x^2$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.
2. Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.
3. Encontrar los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 4x^2$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
4. ¿Existe algún punto de la curva $y = 6x^2 + 8$ en el que la tangente forme con el eje OX un ángulo de 45°?

5 INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

5.1. La derivada de una función tiene una interpretación física como medida de la variación instantánea de una magnitud respecto de otra de la cual depende.

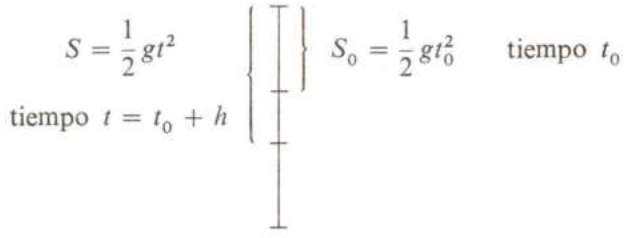
Históricamente, uno de los problemas físicos que llevaron a la noción de derivada es la determinación de la velocidad instantánea de un móvil.

Supongamos que una partícula pesada cae bajo la acción de la gravedad. Experimentalmente puede comprobarse que el espacio recorrido al cabo de t segundos viene dado por la fórmula $S = \dfrac{1}{2} gt^2$ (donde $g = 9{,}8$ m/seg^2 es la constante de gravedad).

Se plantea entonces el siguiente problema: ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el instante t_0?

El espacio recorrido en los t_0 segundos es $S_0 = \frac{1}{2} g t_0^2$, y el recorrido al cabo de $t_0 + h$ será $S = \frac{1}{2} g(t_0 + h)^2$, luego el espacio recorrido en el intervalo transcurrido entre t_0 y $t_0 + h$ es $S - S_0 = \frac{1}{2} g(t_0 + h)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2$, es decir, $S - S_0 = g t_0 h + \frac{1}{2} g h^2$, y la velocidad media en ese intervalo de tiempo será

$$v_m = \frac{S - S_0}{t_0 + h - t_0} = g t_0 + \frac{1}{2} g h$$



Parece lógico pensar que la velocidad media se acercará a la velocidad en el instante t_0 cuando h se haga suficientemente pequeño, es decir:

$$v_{\text{instantánea}} = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = S'(t_0)$$

Es decir, la velocidad en el instante t_0 es la derivada de S en t_0.

Ejemplo:

- Una partícula se mueve de forma que la distancia recorrida viene dada en función del tiempo por $S(t) = 4t^2 + 3t - 1$. ¿Cuál será su velocidad en el instante $t_0 = 1$?

  Tenemos $v = S'(1) = 11$ m/seg (teniendo en cuenta que $S'(t) = 8t + 3$).

5.2. En general, dada una función $y = f(x)$, la derivada $f'(x)$ se interpreta como la medida de la razón de cambio de la variable y con respecto de x.

Si la variable x es función del tiempo, $x = g(t)$, entonces $y = f \circ g(t)$, y utilizando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas:

$$y' = \frac{d(f \circ g)}{dt} = \frac{d(f \circ g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$$

o en notación de Leibniz

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

lo que nos permite calcular tanto la variación de y respecto de x como la de y respecto de t.

Ejemplos:

- Un punto se mueve sobre la parábola de ecuación $y = x^2 - 6x$. ¿En qué punto de la curva la variación de la ordenada es cuatro veces la de la abscisa?

  x e y son funciones del tiempo. Derivando tenemos, por la regla de la cadena, $\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} - 6\frac{dx}{dt}$.

  Como $\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt}$, se tiene

  $$4\frac{dx}{dt} = (2x - 6)\frac{dx}{dt}$$

  de donde $4 = 2x - 6$ y $x = 5$, luego el punto es $(5, -5)$.

- La longitud del lado de un cuadrado aumenta a razón de 2 cm/seg. ¿Con qué velocidad aumentará su área cuando el lado tenga 30 cm?

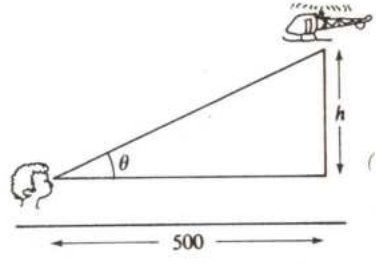
  El área del cuadrado es $S = l^2$, luego $\frac{dS}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$. Sabemos que $l = 30$ y $\frac{dl}{dt} = 2$, luego $\frac{dS}{dt} = 2 \cdot 30 \cdot 2 = 120$ cm^2/seg.

- Un helicóptero despega a 500 m de un observador y se eleva a 10 m/seg. ¿A qué velocidad varía el ángulo de elevación del helicóptero respecto del observador cuando el helicóptero está a 400 m del suelo?

  De la figura 6 se observa que $\text{tg}\theta = \frac{h}{500}$,

  luego $\theta = \text{arc tg}\frac{h}{500}$; entonces, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

  $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{500}\right)^2} \cdot \frac{1}{500}\frac{dh}{dt}$$



(Fig. 6)

  Se sabe que $h = 400$ m, $\frac{dh}{dt} = 10$ m/seg, luego $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{90}$ rad/seg.

Ejercicios:

1. Un móvil se desplaza de forma que en cada instante el espacio recorrido en metros viene dado por $S(t) = t^3 + 2t^2$. ¿Qué velocidad lleva en el instante $t_0 = 2$ seg? ¿Cuándo será su velocidad de 7 m/seg?

2. Una escalera se encuentra apoyada en una pared vertical. La escalera tiene 5 m de longitud. Se supone que la parte inferior se aleja de la pared a razón de 0,75 m/seg. ¿A qué velocidad desciende su parte superior cuando el extremo inferior se encuentra a 2 m de la pared?

3. En un globo se introduce gas y se sabe que cuando el diámetro tiene 6 m, la superficie del globo varía a razón de 18,84 m^2/seg. ¿A qué velocidad aumenta el radio en ese instante?

4. Una torre está al final de una calle. Un hombre se dirige en automóvil hacia la torre a razón de 15 m/seg. Sabiendo que la torre tiene 500 m de altura, ¿con qué velocidad varía el ángulo del observador respecto de la cumbre de la torre cuando el observador se encuentra a 1.000 m de la torre?

6 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

6.1. *Sea* $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ *una función y sea* $x_0 \in]a, b[$. f *se dice creciente en* x_0 *si existe un entorno de* x_0, $E =]x_0 - h, x_0 + h[\subset]a, b[$ *tal que*

si $x_0 - h < x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$ y
si $x_0 < x < x_0 + h$, entonces $f(x_0) < f(x)$

De forma análoga se dice que f es *decreciente en* x_0 si existe un entorno de x_0, $E =]x_0 - h, x_0 + h[$ contenido en $]a, b[$, tal que

si $x_0 - h < x < x_0$, entonces $f(x_0) < f(x)$ y
si $x_0 < x < x_0 + h$, entonces $f(x) < f(x_0)$

Ejemplos:

- La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es creciente en $x_0 = 1$; en efecto, tomemos $E =]0, 2[\subset \mathbb{R}$.

  Si $0 < x < 1$, entonces $0 < x^3 < 1$, luego $f(x) < f(1)$

  Si $1 < x < 2$, entonces $1 < x^3 < 8$, luego $f(1) < f(x)$

- Veamos si la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es creciente o decreciente en $x_0 = 0$. Sea $E =]-h, h[$ un entorno arbitrario de $x_0 = 0$.

  Si $-h < x < 0$, entonces $0 < x^2 < h^2$, luego $f(0) < f(x)$ y f no puede ser creciente.

  Si $0 < x < h$, entonces $0 < x^2 < h^2$, es decir, $f(0) < f(x)$ y f no puede ser decreciente. Por tanto, f no es creciente ni decreciente en $x_0 = 0$.

6.2. *Si una función* $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ *es derivable en* $x_0 \in]a, b[$, entonces:

a) *si* $f'(x_0) > 0$, *entonces* f *es creciente en* x_0
b) *si* $f'(x_0) < 0$, *entonces* f *es decreciente en* x_0

Demostremos a):

Sabemos que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si $f'(x_0) > 0$, entonces existe un entorno E de x_0 en el que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tiene el mismo signo que el límite, es decir, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, luego $f(x) - f(x_0)$ y $x - x_0$ tienen el mismo signo en E. Por tanto, si $x > x_0$, entonces $f(x) > f(x_0)$. Si $x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$, con lo que f es creciente en x_0.

La demostración de b) es análoga.

Ejemplos:

- La función $f:]2, 4[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$ es creciente en $x_0 = 3$.

  En efecto, $f'(x) = 6x + 6$ y $f'(x_0) = 24 > 0$.

- La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ es decreciente en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$; en efecto,

  $f'(x) = 3 \cos 3x$ y $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -3 < 0$.

Nota: El teorema **6.2** da una condición suficiente para que una función sea creciente o decreciente en x_0; sin embargo, esta condición no es necesaria, ya que puede suceder que f sea creciente (decreciente) en x_0 y su derivada sea nula en x_0. Por ejemplo, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es creciente en $x_0 = 0$ y $f'(x_0) = 0$.

Ejercicio:

Estudiar si cada una de las siguientes funciones es creciente o decreciente en los puntos indicados.

a) $f(x) = -x^5$ en $x_0 = -1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 2$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \cos x$ en $x_0 = 0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en $x_0 = 0$

7 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

7.1. Sea f: $]a, b[\to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f tiene un *máximo relativo en* $x_0 \in]a, b[$ si existe un entorno E de x_0, contenido en $]a, b[$, tal que para todo $x \in E$ es $f(x) \leq f(x_0)$.

Análogamente, se dice que f posee un *mínimo relativo* en x_0 si existe un entorno E de x_0, contenido en $]a, b[$, tal que para todo $x \in E$ es $f(x) \leq f(x_0)$.

7.2. Si f: $]a, b[\to \mathbb{R}$ es una función derivable en $x_0 \in]a, b[$, entonces si x_0 es un máximo o un mínimo debe ser $f'(x) = 0$.

Demostremos el teorema para el caso en que f alcanza un máximo. Las derivadas por la derecha y por la izquierda de f en x_0 son:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

y como f es derivable, las derivadas por la izquierda y por la derecha coincidirán entre sí y con $f'(x_0)$, y esto sólo es posible si $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

La demostración para el caso del mínimo es análoga.

El teorema proporciona una condición necesaria para los máximos o los mínimos locales o relativos de una función derivable sobre un intervalo. Pero no es una condición suficiente, es decir, puede ocurrir que $f'(x_0) = 0$ y, sin embargo, la función f en x_0 no alcance ni un máximo ni un mínimo.

Así, en la función $f(x) = x^3$ se verifica $f'(0) = 0$, y la función es creciente en el punto $x_0 = 0$.

7.3. Sea f: $]a, b[\to \mathbb{R}$ una función que posee derivada segunda en $]a, b[$; si $f'(x_0) = 0$, entonces:

a) si $f^{(2)}(x_0) < 0$, f tiene un máximo en x_0
b) si $f^{(2)}(x_0 > 0$, f tiene un mínimo en x_0

Para comprobar a) supongamos que $f^{(2)}(x_0) < 0$; entonces, la función $y' = f'(x)$ es decreciente en x_0, puesto que la derivada de esta función es negativa en x_0; como $f'(x_0) = 0$, y hemos visto que es decreciente, será $f'(x_0 - h) > 0$ y $f'(x_0 + h) < 0$, luego f es creciente en los puntos $x_0 - h$ y decreciente en los puntos $x_0 + h$; por tanto, x_0 es un máximo de f. La demostración de b) es análoga.

Nota: Obsérvese que **7.3** presenta el caso dudoso en que $f^{(2)}(x_0) = 0$. Más adelante, al estudiar el teorema de Taylor, veremos cómo podemos resolver este caso dudoso.

Ejercicios:

1. Estudiar los máximos y mínimos de las funciones:
   a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
   b) $f(x) = x^2 + 6x - 1$
   c) $f(x) = 3x^2 + 3$
   d) $f(x) = \text{sen}2x$
   e) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$
2. Un alambre de 100 m se corta en dos partes iguales, y con una de ellas se forma una circunferencia y con la otra un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?
3. Encontrar el punto de la curva $y = \sqrt{x}$ más próximo al (2, 0).
4. Hallar un punto situado en el eje de abscisas tales que la suma de distancia de dicho punto a los (2, 0) y (0, 3) es mínima.
5. Hallar la longitud de los lados del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 10 m, de forma que su base inferior esté sobre el diámetro.

8 TEOREMA DE ROLLE

8.1. *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ $(a < b)$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$ y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un $\xi \in]a, b[$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Dado que f es continua en $[a, b]$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass existen puntos de $[a, b]$ en los que f alcanza su valor máximo M y su valor mínimo m. Distinguiremos dos casos:

a) $M = m$. Entonces como para todo $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, se sigue que f es constante, y para todo $x \in [a, b]$, $f(x) = M$, luego su derivada es 0 en todos los puntos, y, por tanto, tomando $\xi \in]a, b[$, arbitrario, se tiene $f'(\xi) = 0$.

b) $M \neq m$. En este caso M o m es distinto de $f(a) = f(b)$. Supongamos $m \neq f(a) = f(b)$ (el caso $M \neq f(a) = f(b)$ es análogo). Por el teorema de Bolzano, existe un $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = m$; evidentemente, $\xi \neq a, b$, luego $\xi \in]a, b[$. Demostremos que $f'(\xi) = 0$.

Como $\xi \in]a, b[$, entonces, por hipótesis, f es derivable en $]a, b[$, luego $f'(\xi) = f'_+(\xi) = f'_-(\xi)$.

Observemos que como m es el mínimo de f, entonces:

$$h > 0 \quad \text{implica} \quad \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0$$

$$h < 0 \quad \text{implica} \quad \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0$$

Por tanto:

$$f'_+(\xi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0$$

y

$$f'_-(\xi) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0$$

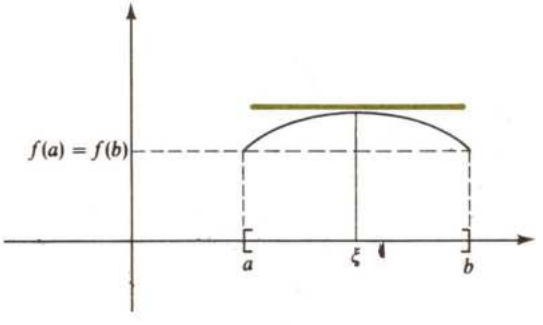
Entonces:

$$f'(\xi) = f'_+(\xi) \geq 0$$

$$f'(\xi) = f'_-(\xi) \leq 0$$

y la única posibilidad entonces es $f'(\xi) = 0$.

8.2. El teorema de Rolle tiene una sencilla interpretación geométrica, como se indica en la figura 7. El teorema afirma que si el origen y el extremo de un arco de curva continua y derivable (es decir, con tangente en todos sus puntos) tienen la misma ordenada, entonces en algún punto de la curva la tangente es paralela al eje OX.



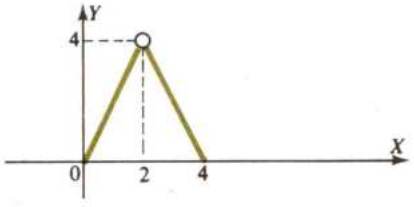
(Fig. 7)

8.3. Las hipótesis del teorema no pueden simplificarse, como demuestran los siguientes ejemplos.

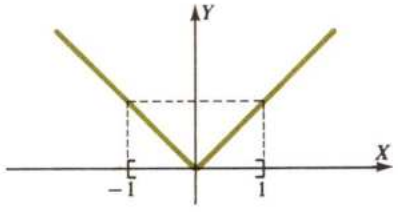
a) Si f no es continua en $[a, b]$

f: $[0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \begin{cases} 2x \text{ si } 0 \leq x < 2 \\ 0 \text{ si } x = 2 \\ -2x + 8 \text{ si } x < 2 \leq 4 \end{cases} \quad \text{(Fig. 8).}$$



(Fig. 8)



(Fig. 9)

b) Si f no es derivable en $]a, b[$

f: $[-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$ (Fig. 9).

Ejercicios:

1. La función f: $[1, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 11$ ¿verifica las hipótesis del teorema de Rolle? Encontrar, en caso afirmativo, un $\xi \in [1, 3]$ tal que $f'(\xi) = 0$.
2. Dar un ejemplo de una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ que no verifique alguna de las hipótesis del teorema de Rolle y, sin embargo, exista un $\xi \in [a, b]$ tal que $f'(\xi) = 0$.
3. La función f:$[-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ verifica $f(-1) = f(1) = 1$ y es continua en $[-1, 1]$. Encontrar su derivada y demostrar que no se anula en ningún punto. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?
4. Demostrar que la ecuación $e^x + 2x = 1$ tiene una sola raíz real. (Indicación: Para la existencia, utilizar el teorema de los valores intermedios, teniendo en cuenta que $2{,}8 > e > 2{,}7$; para la unicidad, utilizar el teorema de Rolle.)

9 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

9.1. *Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ $(a < b)$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$, entonces existe un $\xi \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.*

Consideremos la función g definida en $[a, b]$ por $g(x) = [f(b) - f(a)]x - (b - a)f(x)$. g es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ por serlo f; además, $g(b) = [f(b) - f(a)]b - (b - a)f(b) = af(b) - bf(a)$, y, análogamente, $g(a) = [f(b) - f(a)]a - (b - a)f(a) = af(b) - bf(a)$.

Entonces g es una función continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$, y $g(a) = g(b)$.

Por el teorema de Rolle, existe un $\xi \in]a, b[$ tal que $g'(\xi) = 0$.

Como $g'(x) = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(x)$ se tiene:

$$0 = g'(\xi) = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(\xi), \text{ de donde:}$$

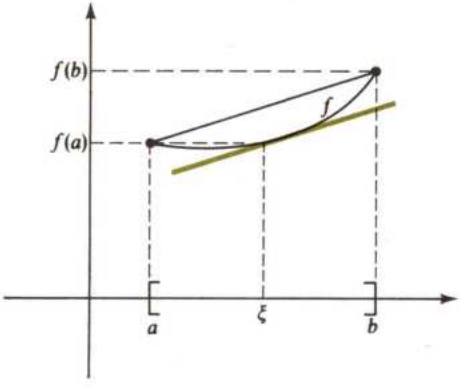
$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$$

9.2. La fórmula del teorema del valor medio se puede escribir (dado que $b \neq a$) en la forma

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ con } \xi \in]a, b[$$

9.3. El teorema del valor medio tiene la siguiente interpretación geométrica. Consideremos la gráfica de la función f (Fig. 10). La cuerda limitada por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ tiene por pendiente $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

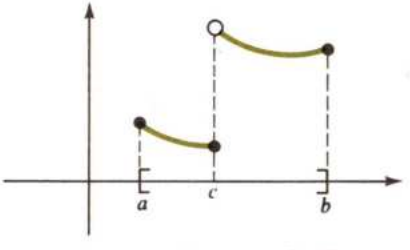
Recordando la interpretación de derivada en un punto como pendiente de la tangente a la curva en dicho punto, el teorema afirma que existe un punto en el intervalo $]a, b[$ en el que la tangente a la curva es paralela (tiene la misma pendiente) a la cuerda que une los extremos.



(Fig. 10)

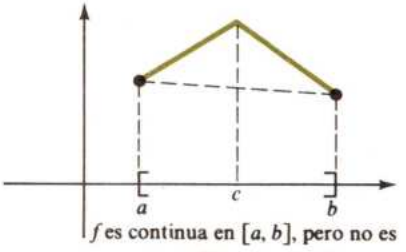
9.4. El teorema del valor medio también tiene una interpretación física. Si consideramos la función $f(t)$ como la expresión de la trayectoria de un móvil (t representando el tiempo), entonces la velocidad media del móvil entre los tiempos $t_0 = a$ y $t_1 = b$ es $v_m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Recordando la interpretación física de la derivada en un punto de la trayectoria como la velocidad instantánea del móvil en dicho punto, el teorema afirma que existe al menos un punto en el que el móvil alcanza la velocidad media.

9.5. Las hipótesis del teorema no pueden rebajarse, como demuestran las figuras 11 y 12.



f no es continua en $c \in [a, b]$

(Fig. 11)



f es continua en $[a, b]$, pero no es derivable en $c \in]a, b[$

(Fig. 12)

Ejercicios:

1. Dada la parábola $y = 3x^2$, encontrar un punto en el que la tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos $[0, 0]$ y $[4, 48]$.

2. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$. Demostrar que si $x_1, x_2 \in]a, b[$ y $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3. Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Sea $x_0 \in]a, b[$ y $f'(x) \geq 0$ para $a < x < x_0$. Demostrar que f tiene en a un mínimo relativo

10 TEOREMA DE CAUCHY

Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto $]a, b[$. Existe un punto $\xi \in]a, b[$ tal que

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)]$$

Si $g(b) = g(a)$, entonces, aplicando el teorema de Rolle a la función g, se deduce que existe un $\xi \in]a, b[$ tal que $g'(\xi) = 0$.

Luego $f'(\xi)[g(b) - g(a)] = 0 = g'(\xi)[f(b) - f(a)]$.

Si $g(b) \neq g(a)$, consideremos la función h definida en $[a, b]$ por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

h es continua en $[a, b]$ por serlo f y g y derivable en $]a, b[$ por la misma razón. Por otra parte, $h(a) = h(b) = 0$, como fácilmente puede comprobarse; entonces, por el teorema de Rolle existe un $\xi \in]a, b[$ tal que $h'(\xi) = 0$.

Como:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \text{ se sigue que } 0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$$

de donde: $f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)]$

Notas:

Si $g(b) \neq g(a)$ y g' no se anula en $]a, b[$, el teorema de Cauchy se puede escribir en la forma: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ con $\xi \in]a, b[$.

El teorema del valor medio es un caso particular del teorema de Cauchy, cuando se toma g la identidad, es decir, $g(x) = x$. En este caso, $g(b) = b, g(a) = a$ y $g'(x) = 1$, luego $g'(\xi) = 1$ y $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ con $\xi \in]a, b[$.

EJERCICIOS FINALES

1. Calcular, utilizando la definición, la derivada de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 2$

   b) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ en $x_0 = 0$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ en $x_0 = 1$

   d) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

   e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

   f) $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

2. Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 6$ en el punto de abscisa -2.

3. ¿En qué puntos de la curva $y = x^2 + 8$ la tangente forma un ángulo de $135°$ con la parte positiva del eje OX?

4. Encontrar las seis primeras derivadas de $y = L(1 + x)$.

5. Encontrar las cinco primeras derivadas en $x_0 = 1$ de $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$.

6. Encontrar las funciones derivadas de $f(x) = \operatorname{tg} x$ hasta el orden 4.

7. Si $f(x)$ es una función polinómica de grado n, ¿cuál es su derivada de grado n? ¿Y de grado mayor que n?

8. Sobre un montón cónico de arena está cayendo arena a razón de 10 dm^3 por minuto. El radio de la base se mantiene constantemente igual a la mitad de la altura. ¿A qué velocidad crece la altura de la pila cuando tiene 5 dm de altura?

9. Un globo está a 200 m sobre el suelo y se eleva a razón de 15 m/seg. Un automóvil pasa bajo el globo con velocidad de 45 km/h. ¿Con qué velocidad se separan el coche y el globo un segundo después?

10. Una gota de agua esférica cae durante la lluvia absorbiendo humedad proporcionalmente a su área. Demostrar que su radio crece a velocidad constante.

11. Un punto se mueve sobre el eje X con velocidad constante de 10 cm/seg y otro sobre el eje Y con velocidad 30 cm/seg. ¿Con qué velocidad se separan los puntos cuando la abscisa vale 12 cm y la ordenada 20?

12. ¿En qué puntos es creciente la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$?

13. ¿Es creciente la función $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 - 2}$ en $x_0 = 0$?

14. Encontrar en qué puntos son crecientes y en cuáles decrecientes las funciones

    a) $f(x) = x - e^x$ b) $f(x) = x + \cos x$ c) $f(x) = e^x$

15. Sea $f\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ una función que admite derivada segunda no nula en x_0. Demostrar que si f tiene un máximo en x_0, entonces la función $g\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$ tiene un máximo en x_0. ¿Es cierto el resultado para mínimos?

16. Encontrar entre todas las rectas que pasan por el punto (1, 2) la que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar esta área.

17. Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana debe ser 8 m, hallar las dimensiones de la ventana que permita la mayor entrada de luz.

18. Escribir el número 4 como suma de dos enteros positivos tales que la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea mínima.

19. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función f: $[1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } 1 \leq x < 3 \\ 7 - x \text{ si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases} ?$$

20. Demostrar que cualquiera que sea el valor de m, la ecuación $2x^5 + x + m = 0$ no tiene nunca dos soluciones reales.

21. Dada la función $f(x) = x^3 - 18x$ definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, comprobar que verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encontrar su valor de ξ en $[0, 3\sqrt{2}]$ tal que $f'(\xi) = 0$.

CAUCHY (Augustin)

Matemático francés (1789-1857). Se dedicó a la matemática pura, en la que precisó importantes conceptos: límite, continuidad, etc.

A Cauchy y a otros matemáticos de primera fila, como Rieman, Picard, Weierstrass y Poincaré, se deben las formulaciones modernas del análisis de funciones de variable compleja.

Hasta Cauchy, la noción de función continua tenía una formulación ambigua, con llamadas constantes a la intuición geométrica. La definición de continuidad y de límite de Cauchy es esencialmente la que aparece ahora en cualquier libro moderno de matemáticas. La principal aportación de Cauchy fue la introducción del rigor en el análisis matemático.

LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm)

Matemático y filósofo alemán (1646-1716). Pensador de espíritu universal. Su mayor descubrimiento es el del *cálculo diferencial*, que hoy es un instrumento esencial en todas las ciencias. La palabra *función* fue introducida por Leibniz en 1694.

ROLLE (Michel)

Matemático francés (1652-1719). Sus trabajos fueron esencialmente consagrados a la búsqueda de métodos que le permitieran separar y aproximar las raíces reales de una ecuación. Sus estudios le condujeron, en 1691, a enunciar el teorema que lleva su nombre.

TEMA 16 CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

En este tema se estudian algunas de las consecuencias más inmediatas del teorema del valor medio: caracterización de funciones constantes, crecimiento, cálculo del valor aproximado de algunas funciones, etc.

La última parte está dedicada a obtener, utilizando el teorema del valor medio, las reglas de L'Hôpital para deshacer las indeterminaciones clásicas del cálculo de límites.

1 CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1.1. *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f'(x) = 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es constante en $[a, b]$.*

Sea $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq a$. Aplicando el teorema del valor medio al intervalo $[a, x_0]$, existe un $\xi \in]a, x_0[$ tal que:

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(\xi)$$

Pero $\xi \in]a, x_0[\subset]a, b[$, luego $f'(\xi) = 0$, y, por tanto, $f(x_0) = f(a)$. Pero esto significa que f toma en cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ el mismo valor $f(a)$ y, por tanto, f es constante en $[a, b]$.

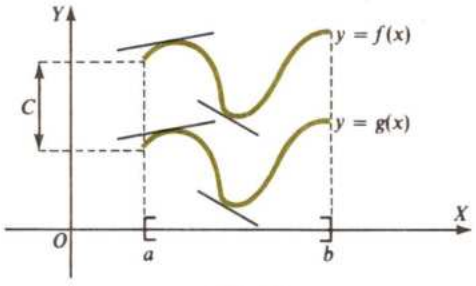
Recordando que $f'(x) = 0$, significa geométricamente que la tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ es paralela al eje de abscisas; el teorema anterior nos dice que *si en todo punto del intervalo $]a, b[$ la tangente a una curva es paralela al eje de abscisas, entonces la curva es una recta paralela al eje de abscisas.*

1.2. Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$ tales que para todo $x \in]a, b[$, $f'(x) = g'(x)$, entonces existe un número real C tal que para todo $x \in [a, b]$, $f(x) = g(x) + C$; es decir, las dos funciones se diferencian en una constante.

En efecto, $f - g$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Además, si $x \in]a, b[$, $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, luego por **1.1** $f - g$ es constante en $[a, b]$. Entonces, si C es el valor de esta constante, $f(x) - g(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$, es decir, $f(x) = g(x) + C$.

Veamos el significado geométrico de esta propiedad. Decir que $f'(x_0) = g'(x_0)$ significa que las pendientes de las tangentes a las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el punto x_0 es la misma; por tanto, dichas tangentes son paralelas.

El resultado anterior expresa entonces el hecho de que si en un intervalo las tangentes a dos curvas son en cada punto paralelas, una curva se deduce de la otra mediante una traslación paralela al eje de ordenadas OY (Fig. 1).



(Fig. 1)

1.3. Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, y para todo $x \in]a, b[$ es $f'(x) \geq 0$, entonces si $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 \leq x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Podemos suponer $x_1 < x_2$, pues si $x_1 = x_2$ obviamente $f(x_1) \leq f(x_2)$.

La función f es continua en $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ y es derivable en $]x_1, x_2[$. Aplicando el teorema del valor medio, existe un $\xi \in]x_1, x_2[$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

Luego $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ y $f(x_1) \leq f(x_2)$.

1.4. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ y tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$. Entonces, si $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, es decir, f es creciente en $[a, b]$.

Razonando de forma análoga a en **1.3**, existe un $\xi \in]x_1, x_2[$ tal que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$.

Entonces, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, y como $f'(\xi) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, se tiene $f(x_2) - f(x_1) > 0$, es decir, $f(x_1) < f(x_2)$. Luego si $f'(x) > 0$ en $]a, b[$, entonces f *es creciente* en $[a, b]$.

1.5. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$; entonces:

a) Si para todo $x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$, entonces si $x_1 \leq x_2$, se tiene $f(x_2) \leq f(x_1)$.

b) Si para todo $x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$, entonces si $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_2) < f(x_1)$, es decir, f es *decreciente* en el intervalo $[a, b]$.

Las demostraciones de estas propiedades son totalmente análogas a las **1.3** y **1.4** (ver ejercicio 1).

Hemos visto que si f es una función derivable en $]a, b[$ y $x_0 \in]a, b[$, entonces si f tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0 debe ser $f'(x_0) = 0$. Ahora bien, ¿qué podemos decir de la existencia de un máximo o mínimo relativo en los extremos del intervalo $[a, b]$? El siguiente resultado nos da la respuesta a esta pregunta.

1.6. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$; entonces:

a) Si existe un $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para todo x que verifica $a < x < a + \delta$, entonces a es un mínimo relativo de f.

b) Si existe un $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para todo x que verifica $b - \delta < x < b$, entonces b es un máximo relativo de f.

Demostraremos a), pues la demostración de b) es análoga (ver ejercicio 2 de este apartado).

Tenemos que ver que existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in]a, a + \delta[$, entonces $f(a) \leq f(x)$.

Tomemos el δ cuya existencia nos asegura la hipótesis y sea $x \in]a, a + \delta[$. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a, x]$, sabemos que existe un $\xi \in]a, x[\subset]a, a + \delta[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

Como $f'(\xi) \geq 0$, se sigue que $f(x) - f(a) \geq 0$, luego $f(x) \geq f(a)$, como queríamos demostrar.

Ejercicios:

1. Demostrar los apartados a) y b) de **1.5.**
2. Demostrar el apartado b) de **1.6.**
3. Encontrar los intervalos en los que las funciones siguientes son crecientes.
   a) $f(x) = 3x^2 + 1$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
   c) $f(x) = \operatorname{sen} x$
   d) $f(x) = x - \operatorname{sen} 2x$
   e) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 8$
4. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Demostrar que si existe un $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para todo x que verifica $b - \delta < x < b$, entonces b es un mínimo relativo de f.

2 OTRAS APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

2.1. El teorema del valor medio puede también aplicarse para calcular el valor aproximado de una función en un punto.

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos calcular $\sqrt{200}$. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$. El cuadrado perfecto más próximo a 200 es $196 = 14^2$, y aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[196, 200]$, entonces existe un ξ tal que $\xi \in]196, 200[$ y $\dfrac{f(200) - f(196)}{200 - 196} = f'(\xi)$.

Es decir, $\sqrt{200} - 14 = 4f'(\xi)$, y $196 < \xi < 200$.

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, se sigue que $f'(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$, luego $\sqrt{200} - 14 = \dfrac{2}{\sqrt{\xi}}$.

De la relación $196 < \xi < 200 < 225$ se sigue:

$$14 < \sqrt{\xi} < 15, \text{ luego } \frac{1}{15} < \frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{14}, \text{ y, por tanto,}$$

$$\frac{2}{15} < \frac{2}{\sqrt{\xi}} < \frac{2}{14}, \text{ es decir, } 0{,}1333 < \frac{2}{\sqrt{\xi}} < 0{,}1428,$$

y de aquí que $14{,}1333 < \sqrt{200} < 14{,}1428$.

2.2. También se puede utilizar el teorema del valor medio para establecer desigualdades entre funciones. Veamos un ejemplo.

Desigualdad de Bernoulli. Sea $x > 0$; entonces, para cualquier número real $r > 1$ se verifica $(1 + x)^r > 1 + rx$.

Consideremos la función $f(x) = (1 + x)^r$. Esta función es continua en $[0, x]$ y derivable en $]0, x[$, y su derivada es $f'(x) = r(1 + x)^{r-1}$.

Aplicando el teorema del valor medio a f en $[0, x]$, se sigue que existe un $\xi \in]0, x[$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$$

es decir, $(1 + x)^r - 1 = f'(\xi)x$; luego $(1 + x)^r = 1 + rx(1 + \xi)^{r-1}$.

Como $1 + \xi > 1$, entonces $(1 + \xi)^{r-1} > 1$, y, por tanto, $(1 + x)^r > 1 + rx$.

Ejercicios:

1. Calcular, utilizando el teorema del valor medio, valores aproximados de
$$\sqrt{105} \quad , \quad \sqrt{228} \quad , \quad \sqrt{10{,}8}$$
2. Demostrar que si r es un número real tal que $0 < r < 1$, entonces para todo $x \geq 0$ se tiene $x^r \leq rx + (1 - r)$. (Indicación: Considerar la función $f(x) = rx - x^r$ y comprobar que $[0, \infty)$ tiene un mínimo en $x = 1$).

3 REGLA DE L'HÔPITAL

3.1. Sabemos, por la teoría de límites estudiada en cursos anteriores, que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones y $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, con $b \neq 0$, entonces $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Nos vamos a ocupar ahora de estudiar el $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, en el caso de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

En este caso, en principio, no podemos decir nada acerca del límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Sin embargo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Estos ejemplos demuestran que no existe un valor fijo que se le pueda asignar como límite a un cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Por esta razón, se dice que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando x tiende a x_0.

Sin embargo, en algunas ocasiones se puede determinar el límite del cociente utilizando la llamada regla de L'Hôpital.

3.2. *Regla de L'Hôpital para la indeterminación* $\frac{0}{0}$.

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $]x_0, x_1[$, tales que f y g son derivables en $]x_0, x_1[$, y para las que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$.
Si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]x_0, x_1[$, y si $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos límites coinciden.
Consideremos las funciones F y G definidas de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son continuas en x_0, pues $F(x_0) = 0 = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, y análogamente para G. Sea x tal que $x_0 < x < x_1$; entonces podemos aplicar el teorema de Cauchy a F y G en el intervalo $[x_0, x]$; de aquí que exista un $\xi_x \in]x_0, x[$ tal que:

$$[F(x) - F(x_0)]G'(\xi_x) = [G(x) - G(x_0)]F'(\xi_x)$$

Luego $f(x)g'(\xi_x) = g(x)f'(\xi_x)$.

Ahora bien, $g(x) \neq 0$, pues si $g(x) = 0$, entonces $G(x) = 0 = G(x_0)$; por el teorema de Rolle debería entonces existir un $a \in]x_0, x[$ tal que $G'(a) = 0$, es decir, $g'(a) = 0$, pero esto contradice el que $g'(x) \neq 0$ en $]x_0, x_1[$.

Tenemos entonces: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$, y, $x_0 < \xi_x < x$.

Como $\xi_x \to x_0^+$ cuando $x \to x_0^+$, resulta, tomando límites en la igualdad:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.3. Es evidente que el teorema sigue verificándose si se toman límites por la izquierda $x \to x_0^-$ y, por consiguiente, si se toman límites cuando $x \to x_0$.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{Lx}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x(2x + 1)} = \dfrac{1}{3}$

Notas:

1) En algunos casos al calcular el límite del cociente de las derivadas vuelve a presentarse la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. En este caso podemos repetir el proceso una vez que hayamos comprobado que se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

   Por ejemplo:

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2}$. Este límite vuelve a tomar la forma $\dfrac{0}{0}$, luego, volviendo a aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6}$$

   y el límite pedido es $\dfrac{1}{6}$.

2) La regla de L'Hôpital es válida también cuando queremos calcular límites indeterminados de la forma $\dfrac{0}{0}$, en donde la variable $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Aunque no daremos la demostración, la regla de L'Hôpital se extiende también al caso de indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 6}$ es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$; se tiene entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x + 2}{8x} \left(\text{que vuelve a resultar } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \left(\text{forma } \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} = \infty$

3.4. Otras indeterminaciones se pueden resolver aplicando la regla de L'Hôpital después de realizar en la expresión del límite que se quiere calcular algunas transformaciones.

a) *Indeterminación* $0.\infty$

Sea $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$; entonces:

$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, que es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ y se le puede aplicar L'Hôpital.

De igual forma podíamos haber escrito:

$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$, que es de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Ejemplo:

- $\lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$. Como $\lim_{x\to 1^+} \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = \infty$ se tiene una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$.

  Luego:

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{\cot\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2x}{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}} = \frac{4}{\pi}$$

b) *Indeterminación* 0^0

Sea $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Entonces, para calcular $A = \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ tomamos en los dos miembros logaritmos neperianos:

$LA = L\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} g(x)Lf(x)$. Como $\lim_{x\to x_0} Lf(x) = -\infty$, puesto que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, resulta que la expresión $g(x)Lf(x)$ presenta una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$, que ya sabemos determinar. Si $\lim_{x\to x_0} g(x)Lf(x) = u$, entonces $LA = u$, y por tanto, $A = e^u$.

Ejemplo:

- Calculemos $\lim_{x\to 0} x^x$. Hacemos $A = \lim_{x\to 0} x^x$, y tomando neperianos:

$$LA = \lim_{x\to 0} xLx = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Luego $A = e^0 = 1$.

c) *Indeterminaciones de la forma* 1^{∞}, ∞^0

Se resuelven de la misma forma que la 0^0. Tomando logaritmos neperianos conducen a indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$.

Ejemplos:

- Calculemos $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

  Es de la forma 1^{∞}. Sea $A = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$; entonces,

  $LA = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} L\cos x = \lim_{x\to 0} \frac{L\cos x}{x^2}$ $\left(\text{que es de la forma } \frac{0}{0}\right)$. Luego:

  $$LA = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} \left(\text{forma } \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$

  Luego $A = e^{-1/2}$.

- Calculemos $\lim_{x\to\infty}(x + e^x + e^{2x})^{1/x}$.

  Se trata de una indeterminación de la forma ∞^0.

  Sea $A = \lim_{x\to\infty}(x + e^x + e^{2x})^{1/x}$; entonces, $LA = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} L(x + e^x + e^{2x})$ (que es de la forma $0 \cdot \infty$). Luego:

  $$LA = \lim_{x\to\infty} \frac{L(x + e^x + e^{2x})}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^x + 2e^{2x}}{x + e^x + e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 4e^{2x}}{1 + e^x + 2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 8e^{2x}}{e^x + 4e^{2x}}$$

  Se observa que si continuamos aplicando la regla de L'Hôpital el cociente *no* se nos va a simplificar.

  Sin embargo, el último límite puede calcularse de la siguiente forma:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 8e^{2x}}{e^x + 4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x} + 8}{\frac{1}{e^x} + 4} = \frac{8}{4} = 2, \text{ pues } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

  Resulta entonces que $LA = 2$, y, por tanto, $A = e^2$.

  Nota: El problema anterior nos da un ejemplo en el que la regla de L'Hôpital no es siempre el método más simple para calcular un límite.

Ejercicio:

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2}$

d) $\lim_{x\to 0^+} (Lx)^x$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}}$

g) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{(Lx)^2}{\sqrt{x}}$

i) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)^{\operatorname{sen} x}$

EJERCICIOS FINALES

1. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Demostrar que si existe un $\delta > 0$ tal que para $a < x < a + \delta$ se verifica $f'(x) < 0$, entonces a es un máximo relativo de f.

2. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ y supongamos que existe un número k tal que para todo $x \in [a, b]$ se tiene $|f'(x)| \leq k$. Demostrar que para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ se tiene $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.

3. Calcular el valor aproximado de $\sqrt{170}$ utilizando el teorema del valor medio.

4. Demostrar que $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$.

5. Sean a y b números tales que $0 < a < b$. Demostrar que

$$\frac{b - a}{1 + b^2} < \text{arc tg}b - \text{arc tg}a < \frac{b - a}{1 + a^2}$$

Deducir que $\frac{\pi}{4} + \frac{9}{25} < \text{arc tg}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

6. Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$.

Demostrar que $\frac{b - a}{b} < L\frac{b}{a} < \frac{b - a}{a}$.

Deducir que $\frac{1}{6} < L1{,}2 < \frac{1}{5}$.

7. Demostrar que $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \text{arc sen}0{,}6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$.

8. Demostrar que $\frac{\text{sen}b - \text{sen}a}{\cos a - \text{sen}b} = \cot\xi$, con $a < \xi < b$.

9. Encontrar el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 7}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{3x^2 - 6x} = \lim_{x\to 2} \frac{6x - 2}{6x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{6}{6} = 1$$

10. En este problema se trata de demostrar la segunda regla de L'Hôpital, ya enunciada en el texto: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, que son derivables y tales que $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$; entonces, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Demostrar:

a) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un número m tal que $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$ si $x > m$.

b) Se puede suponer $g(x) \neq g(m)$ y $f(x) \neq f(m)$.

c) Aplicando el teorema de Cauchy a f y g en $[m, x]$, deducir que $\left|\frac{f(x) - f(m)}{g(x) - g(m)} - l\right| < \varepsilon$ para $x > m$.

d) De la relación $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(m)}{g(x) - g(m)} \cdot \frac{g(x) - g(m)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(m)}$ deducir que $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < 2\varepsilon$ para x suficientemente grande. Por tanto, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

11. Demostrar que si $-1 < x < 1$, entonces $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

12. Demostrar que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen} x < x$.

13. Calcular:

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{L \cos 6x}{L \cos 3x}$

c) $\lim_{x \to 0} (e^{6x} - x)^{1/x}$

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1}$

e) $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{a}{x}$

f) $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$

g) $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

h) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{Lx} - \dfrac{1}{Lx} \right)$

i) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}$

j) $\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

L'HÔPITAL (Guillermo Francisco Antonio de)

Matemático francés (1661-1704). Escribió un libro de texto de cálculo diferencial. Esta obra fue reeditada en muchas ocasiones y jugó un papel importante en la divulgación del Cálculo. Su famosa regla permite hallar multitud de límites utilizando la derivada.

TEMA 17 LA FÓRMULA DE TAYLOR. APLICACIONES

Para calcular el valor de una función polinómica en un punto x sólo se tiene que realizar un número finito de sumas y multiplicaciones. Así es fácil hallar el valor de la función $f(x) = x^2 + 2x$ *para* $x = 0{,}3$*; en cambio, no es fácil hallarlo si se trata de la función* $g(x) = e^x$*. El problema de la aproximación local de una función f en un punto a para el cual* $f(x)$ *sea conocido consiste en hallar otra función polinómica g cuyos valores difieran lo menos posible de los de f en un entorno de a y en conocer la acotación del error cometido en cada caso. Este problema lo resuelve el teorema de Taylor que se estudia en este tema.*

1 DESARROLLO DE UN POLINOMIO EN POTENCIAS DE x−a

1.1. Consideremos el polinomio $P(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 8$; vamos a tratar de escribir este polinomio como una suma de potencias de $x - 1$.

Como el grado de $P(x)$ es 4, la más alta potencia de $x - 1$ que puede aparecer es 4; escribamos:

$$P(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 8 = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0 \quad [1]$$

Haciendo $x = 1$, en la igualdad [1] se tiene: $P(1) = \boxed{-2 = a_0}$

Derivando en [1], resulta:

$$P'(x) = 12x^3 + 4x + 1 = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1 \quad [2]$$

Haciendo en [2] $x = 1$, se tiene: $P'(1) = \boxed{17 = a_1}$

Derivando de nuevo en [2], resulta:

$$P^{(2)}(x) = 36x^2 + 4 = 12a_4(x-1)^2 + 6a_3(x-1) + 2a_2 \quad [3]$$

Haciendo en [3] $x = 1$, se tiene:

$$P^{(2)}(1) = 40 = 2a_2 \quad ; \quad \boxed{a_2 = \frac{P^{(2)}(1)}{2} = 20}$$

Procediendo de forma análoga:

$$P^{(3)}(x) = 72x = 24a_4(x-1) + 6a_3 \quad [4]$$

$$P^{(3)}(1) = 72 = 6a_3 \quad ; \quad \boxed{a_3 = \frac{P^{(3)}(1)}{6} = 12}$$

Finalmente:

$P^{(4)}(x) = 72 = 24a_4$ [5]

$$P^{(4)}(1) = 72 = 24a_4 \quad ; \quad \boxed{a_4 = \frac{P^{(4)}(1)}{24} = 3}$$

Entonces:

$$P(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 8 = 3(x-1)^4 + 12(x-1)^3 + 20(x-1)^2 + 17(x-1) - 2$$

1.2. El procedimiento anterior se puede generalizar a un polinomio cualquiera.

En efecto, supongamos $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ y tratemos de desarrollarlo en potencias de $x - a$.

Escribimos, como en el ejemplo anterior:

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 = a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0 \quad [1]$$

1) Hacemos $x = a$: $\boxed{P(a) = a_0}$

2) Derivamos [1]:

$$P'(x) = n \cdot a_n(x-a)^{n-1} + (n-1)a_{n-1}(x-a)^{n-2} + \cdots + 2a_2(x-a) + a_1 \quad [2]$$

3) Hacemos $x = a$: $\boxed{P'(a) = a_1}$

4) Derivamos en [2]:

$$P^{(2)}(x) = n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \cdots + 2a_2 \quad [3]$$

5) Hacemos $x = a$:

$$P^{(2)}(a) = 2a_2 \quad , \quad \boxed{a_2 = \frac{P^{(2)}(a)}{2} = \frac{P^{(2)}(a)}{2!}}$$

6) Derivamos en [3]

$$P^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \cdots + 3 \cdot 2a_3$$

7) Hacemos $x = a$:

$$P^{(3)}(a) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 3!a_3 \quad , \quad \boxed{a_3 = \frac{P^{(3)}(a)}{3!}}$$

Continuando el proceso se obtienen los coeficientes buscados $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ según las fórmulas

$$a_0 = P(a), \; a_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \; a_2 = \frac{P^{(2)}(a)}{2!}, \; \ldots, \; a_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

Ejercicios:

1. Desarrollar en potencias de $x - a$ los siguientes polinomios:
   a) $3x^2 + 2x + 1$; $a = 1$
   b) $4x^3 + 2x - 6$; $a = -2$
   c) $16x^5 + 4x^3 - 2x + 1$; $a = 2$
   d) $6x^5 + 3x + 1$; $a = -\frac{1}{2}$
   e) $3x^6 + 2x^4 + 6x - 7$; $a = 0$

2. ¿Qué se puede decir del desarrollo de $P(x)$ en potencias de $x - a$ cuando $a = 0$?

2 POLINOMIOS DE TAYLOR DE UNA FUNCIÓN

2.1. El proceso seguido en el apartado anterior se puede, bajo ciertas condiciones, extender a una función arbitraria, asociando a dicha función en cada punto una familia de polinomios. Concretamente, sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ y sea $x_0 \in]a, b[$. Supongamos que f posee derivada en x_0 hasta el orden n, entonces se definen los *polinomios de Taylor de la función f en* x_0 *como*:

$$P_0(x) = f(x_0)$$

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

. . . . . .

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ejemplo:

- Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$; sabemos que:
  $f'(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$

  Entonces los polinomios de Taylor de $\operatorname{sen} x$ en $x_0 = 0$ serán:

$$P_0(x) = f(0) = 0$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = x$$
$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$
$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$
$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

2.2. *Teorema de Taylor.* Sea n un número natural y f una función definida en $[a, b]$ y supongamos que las derivadas $f'(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ existen y son continuas en $]a, b[$ y que $f^{(n)}(x)$ existe en $]a, b[$; entonces si $\alpha, \beta \in [a, b]$, existe un número $\xi \in]\alpha, \beta[$ tal que:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n \quad [1]$$

Sea

$$A = \frac{f(\beta) - \left[f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1}\right]}{\frac{(\beta - \alpha)^n}{n!}} \quad [1]$$

y sea g la función definida en $[a, b]$ por

$$g(x) = f(\beta) - \left[f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(\beta - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(\beta - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} + \frac{A}{n!}(\beta - x)^n\right]$$

Evidentemente g es continua en $[\alpha, \beta]$ y derivable en $]\alpha, \beta[$. Además $g(\alpha) = 0$ y $g(\beta) = 0$, luego por el teorema de Rolle existe un $\xi \in]\alpha, \beta[$ tal que $g'(\xi) = 0$, pero

$$g'(x) = -\left[f'(x) + \frac{f^{(2)}(x)}{1!}(\beta - x) - \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f^{(3)}(x)}{2!}(\beta - x)^2 - 2\frac{f^{(2)}(x)}{2!}(\beta - x) + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(\beta - x)^3 - 3\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(\beta - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} - (n-1)\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-2} - n\frac{A}{n!}(\beta - x)^{n-1}\right]$$

y simplificando:

$$g'(x) = \frac{A - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1}$$

Como $g'(\xi) = 0$ se sigue que $A = f^{(n)}(\xi)$, y de aquí, teniendo en cuenta [1]:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n \quad [2]$$

2.3. Al estudiar la fórmula de Taylor [2], vemos que el término $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n$ depende del valor de $f^{(n)}(x)$ en el punto ξ, pero de ξ sabemos solamente que es un número comprendido entre α y β.

El término $R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n$ se llama el *resto de Taylor en la forma de Lagrange.*

2.4. Si fijamos α y hacemos variar β, obtenemos la fórmula

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(x - \alpha)^{n-1} + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \alpha)^n$ con $\alpha < \xi < x$, que se puede escribir como

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x)$$

donde $P_{n-1}(x)$ es el polinomio de Taylor de orden $n - 1$ de la función f en el punto α.

Cuando se toma $\alpha = 0$ la fórmula anterior se conoce también con el nombre de fórmula de MacLaurin.

Ejercicios:

1. Obtener los polinomios de Taylor de las funciones que se indican a continuación:
   a) $f(x) = \cos x$, en $x = 0$, hasta el de orden 9.
   b) $f(x) = e^x$, en $x = 2$, hasta el de orden 6.
   c) $f(x) = 3^x$, en $x = 0$, hasta el de orden 4.
   d) $f(x) = L(1 + x)$, en $x = 0$, hasta el de orden 5.
   e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, en $x = 2$, hasta el de orden 6.
2. Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = e^x$, $h(x) = L(1 + x)$, comprobar que verifican las hipótesis del teorema de Taylor y expresar, mediante la fórmula de dicho teorema, sen0,01, $e^{0,2}$ y $L(1{,}12)$.

3 INFINITÉSIMOS. COMPARACIÓN DE FUNCIONES

3.1. Consideremos las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$. Para todas ellas el límite cuando $x \to 0$ vale 0. Nos podemos preguntar cuál de ellas tiende a cero más rápidamente. Si observamos los valores de dichas funciones para valores próximos a cero tenemos:

	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}05$	$x = 0{,}01$	$x = 0{,}005$
$f(x)$	0,1	0,05	0,01	0,005
$g(x)$	0,01	0,0025	0,0001	0,000025
$h(x)$	0,0998	0,0499	0,00999	0,00499

Vemos en esta tabla que así como x y $\operatorname{sen} x$ toman valores muy próximos entre sí, no sucede así con x^2, que tiende a cero mucho más rápidamente que las otras dos funciones.

Dadas dos funciones que tienen por límite cero cuando $x \to x_0$, un método útil para investigar cuál de ellas tiende más rápidamente a cero es el de infinitésimos equivalentes.

3.2. Una función f definida en un entorno de x_0 se dice que es un *infinitésimo en* x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Por ejemplo, $\operatorname{sen} x$, $1 - \cos x$, $\frac{x}{2}$ son infinitésimos en $x_0 = 0$; las funciones $(x - a)^2$, $(x - a)^3$ son infinitésimos en $x_0 = a$.

3.3. Sean f y g dos infinitésimos en x_0. Se dice que f *es de orden superior a* g si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. En este caso escribiremos $f = 0(g)$.

Si f y g son dos infinitésimos en x_0, se dice que f *es equivalente a* g si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En este caso se escribe $f \sim g$.

Ejemplos:

- Dado que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, se sigue que $x \sim \operatorname{sen} x$ en el punto $x_0 = 0$.
- Como $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ luego $x^2 = 0(x)$ en el punto $x_0 = 0$.
- De $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, se tiene $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en el punto $x_0 = 0$.

3.4. *Si en un límite aparece un infinitésimo como factor se puede sustituir dicho infinitésimo por otro equivalente.*

En efecto, supongamos $f \sim g$ en x_0. Consideremos el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)h(x)$. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \to x_0} g(x)h(x) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} g(x)h(x), \text{ ya que } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ejemplo:

- Calculemos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x}{x^3}$; tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x}{x^3} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^3} = \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{x^3}$$

Recordando que $x \sim \operatorname{sen} x$ y $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en $x_0 = 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Nota: No es cierto que un infinitésimo se pueda sustituir por otro equivalente en una suma o diferencia. Así, aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{1+\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{\cos x}=3$$

En cambio, si sustituimos sen$x$ por x, se tendrá:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{1+\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{1+x}=0$$

3.5. Sea f una función con derivada enésima, $f^{(n)}$, continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $x_0 \in]a, b[$; entonces si $P_n(x)$ es el polinomio enésimo de Taylor de f en x_0, se verifica que:

$$f(x)-P_n(x)=0(x-x_0)^n$$

Tenemos que calcular:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\cdots-\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}$$

Este límite presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, y podemos calcularlo utilizando la regla de L'Hôpital.

Previamente haremos las siguientes observaciones:

$$f^{(p)}(x-a)^r=\begin{cases}0 \text{ si } p>r\\ r! \text{ si } p=r\\ r(r-1)(r-2)\ldots(r-p+1)(x-a)^{r-p} \text{ si } r>p\end{cases}$$

Entonces, aplicando reiteradamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x-x_0)\ldots-\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2)}(x)-f^{(2)}(x_0)-\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x-x_0)\ldots\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$

3.6. El resultado anterior nos dice que $f(x) - P_n(x)$ es infinitésimo en x_0 de orden superior a $(x - x_0)^n$, es decir, que $f(x) - P_n(x)$ se aproxima a cero, en un entorno de x_0, más rápidamente que $(x - x_0)^n$, pero esto significa que el polinomio $P_n(x)$ se aproxima a la función $f(x)$ (en un entorno de x_0) más rápidamente que la función $(x - x_0)^n$ lo hace a cero.

Dado que la función $(x - x_0)^n$ toma valores muy próximos a cero para valores de x próximos a x_0, resulta que para valores próximos a x_0 los polinomios de Taylor ofrecen una buena aproximación de la función $f(x)$ en puntos suficientemente próximos a x_0 y, por tanto, podemos utilizar dicho polinomio para calcular valores aproximados de la función en puntos próximos a x_0, conociendo los valores de f y sus derivadas en el punto x_0.

Veamos algunos

Ejemplos:

- La función $f(x) = \text{sen}x$.

  Sus polinomios de Taylor en $x_0 = 0$ son:

$$P_0(x) = f(0) = \text{sen}0 = 0$$

$$P_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) = x$$

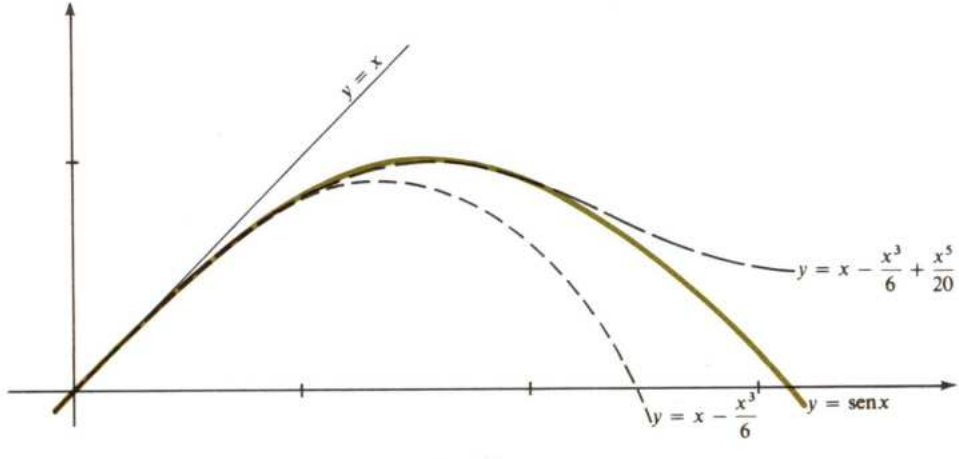
$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x - 0)^2 = x$$

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x - 0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

  En la gráfica de la figura 1 se han representado la función sen$x$ en las proximidades del origen y los polinomios de Taylor de grado 5; como vemos, las gráficas aproximan cada vez más a la función sen$x$.



(Fig. 1)

Podemos tomar, pues, el valor de estos polinomios en puntos próximos a cero para calcular con una buena aproximación los valores de los senos de ángulo cuya medida (en radianes) es próxima a cero.

La tabla siguiente nos permite comparar el valor de sen0,1 calculado con tablas y calculado a partir de los polinomios de Taylor.

sen0,1 = 0,0998345	$P_0(0,1)$	$P_1(0,1)$	$P_3(0,1)$
	0	0,1	0,0998334

No hemos calculado el valor de P_5, pues ya se ve que la aproximación es suficientemente buena.

- Sea la función $f(x) = e^x$.

Los polinomios de Taylor en $x_0 = 0$ son:

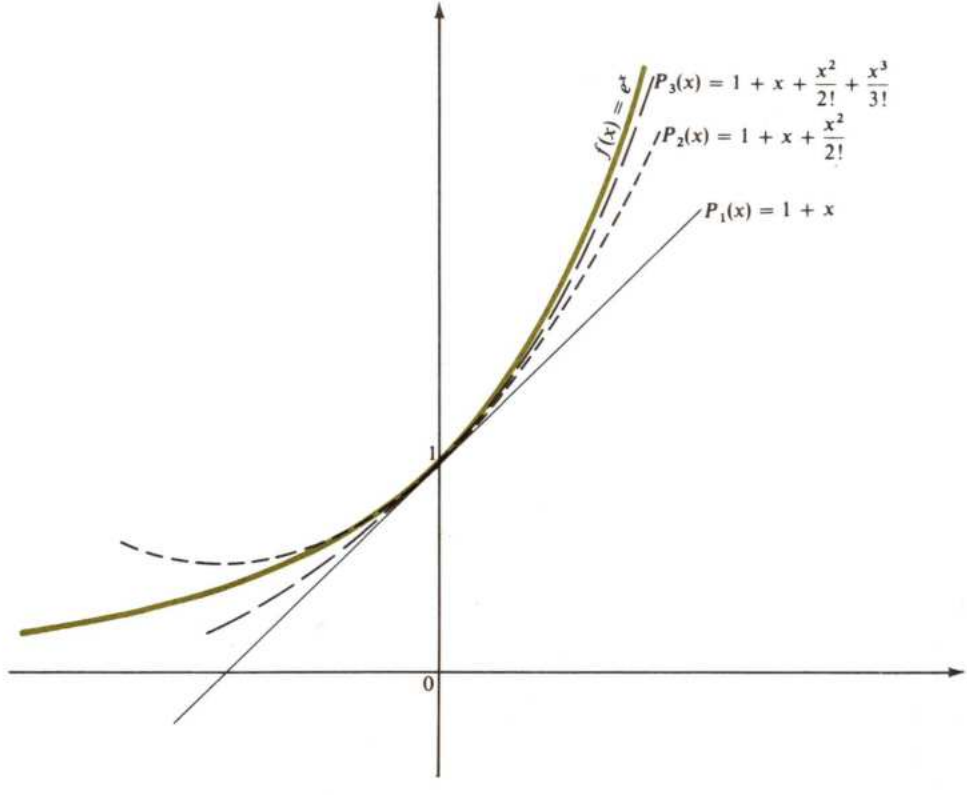
$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = 1 + x$

$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

Como se observa en la gráfica de la figura 2, estos polinomios vuelven a aproximar a f en las proximidades de $x_0 = 0$.



(Fig. 2)

Nota: Es importante observar que la aproximación es válida para valores próximos al punto x_0 en el cual se calculan los polinomios de Taylor.

3.7. Lo anteriormente expuesto nos permite afirmar que los polinomios aproximan de forma muy aceptable el valor de la función en las proximidades de un punto.

La pregunta inmediata es: ¿Podemos decir algo sobre el error que se comete al tomar como valor de la función el valor de uno de los polinomios de Taylor?

Recordemos que el teorema de Taylor nos dice que si f es una función definida en $[a, b]$ tal que las derivadas $f^{(1)}, \ldots, f^{(n-1)}$) son continuas en $]a, b[$ y $f^{(n)}$ existe en $]a, b[$, entonces existe un $\xi \in]a, b[$ tal que

$$f(b) = P_{n-1}(b) + R_n(b)$$

donde $P_{n-1}(b)$ es el valor para $x = b$ del $(n-1)$-ésimo polinomio de Taylor en a y $R_n(b)$ es el resto.

El error cometido al tomar el $(n-1)$-ésimo de Taylor en lugar de la función será:

$$|f(b) - P_{n-1}(b)| = |R_n(b)|$$

luego el error (en valor absoluto) es el valor del resto.

Ahora bien, $R_n(b) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$, y del número ξ no sabemos más que $a < \xi < b$; sin embargo, bajo ciertas condiciones puede darse una cota de este error, como veremos a continuación.

3.8. Sea f una función definida en $[a, b]$ y tal que las derivadas $f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[a, b]$ y $f^{(n)}$ existe en $]a, b[$; supongamos además que existe un número real M tal que para todo $x \in]a, b[$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$; entonces:

$$|R_n(b)| \leq M\frac{|b-a|^n}{n!}$$

Sabemos que $R_n(b) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$, con $\xi \in]a, b[$

Entonces $|R_n(b)| = \dfrac{|f^{(n)}(\xi)||b-a|^n}{n!} \leq \dfrac{M|b-a|^n}{n!}$

Ejemplos:

- Calcular sen0,1 con cinco decimales. Consideremos la función $f(x) = \text{sen}x$ y tomemos el intervalo $[0, 0{,}1]$. La función f verifica las condiciones del teorema de Taylor, y, por otra parte, para todo $x \in]0, 0{,}1[$, $|\text{sen}x| \leq 1$, luego

  $$|R_n(b)| \leq \frac{(0{,}1)^n}{n!}$$

  Dado que queremos obtener sen0,1 con cinco decimales debemos tener $|R_n(b)| < 10^{-5}$; por tanto, es suficiente tomar $n = 5$; de aquí que $\text{sen}(0{,}1) = P_4(0{,}1)$, y como

  $$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

  resulta $\text{sen}(0{,}1) = 0{,}1 - \dfrac{0{,}001}{6} = 0{,}09983$.

- ¿De qué orden debemos tomar el polinomio de Taylor de e^x para calcular $e^{0,1}$ con error menor de 10^{-3}?

  La función $f(x) = e^x$ verifica las hipótesis del teorema de Taylor; sabemos que en $]0, 0{,}1[$, $|f(x)| < 3$, luego $|R_n(0{,}1)| < \dfrac{3(0{,}1)^n}{n!}$ como debe ser $\dfrac{3(0{,}1)^n}{n!} < 10^{-3}$ resulta que es suficiente tomar $n = 3$, luego debemos tomar el polinomio $P_2(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$ y el valor aproximado de 0,1 es:

$$P_2(0{,}1) = 1 + \frac{0{,}1}{1} + \frac{0{,}01}{2} = 1{,}105$$

Ejercicios:

1. Calcular $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + 0{,}2\right)$ con error menor de 10^{-4}.

   (Indicación: Aproximar sen$x$ mediante polinomios de Taylor en $\dfrac{\pi}{3}$ y acotar el resto.)

2. Calcular $\cos 61°$ con tres decimales.

   (Indicación: Proceder como en el ejercicio anterior, expresando previamente el ángulo en radianes $61° = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{10\pi}{18}$.)

3. Encontrar una cota del error cometido al tomar como valor de cos0,1 el obtenido a partir del polinomio de Taylor de orden 7.

4. Calcular una cota del error cometido al tomar como valor de $e^{0,3}$ el obtenido a partir del polinomio de Taylor de orden 5. (Acotar $f(x) = e^x$ en $]0, 0{,}3[$.)

4 ALGUNOS EJEMPLOS DE DESARROLLOS DE TAYLOR

a) *Función exponencial, $f(x) = e^x$, en $x_0 = 0$*

Las derivadas sucesivas de $f(x) = e^x$ son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= e^x & f^{(2)}(0) &= 1 \\ f^{(3)}(x) &= e^x & f^{(3)}(0) &= 1 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces el desarrollo de Taylor en $x_0 = 0$ es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} \quad ; \quad \xi \in (0, x)$$

b) *Función seno*, $f(x) = \text{sen}x$, *en* $x_0 = 0$

$$f'(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f^{(3)}(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

En general $f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Entonces, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$.

Como se ve, los valores de las derivadas de orden par son cero, mientras que los impares son de la forma $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Entonces:

$$\text{sen}x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \\ + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi \quad , \quad \xi \in (0, x)$$

c) *Función coseno*, $f(x) = \cos x$, *en* $x_0 = 0$

$$f'(x) = -\text{sen}x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f^{(3)}(x) = -\text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

y en general, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, se tiene entonces: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0, \ldots,$ se observa que los valores de las derivadas de orden impar son cero, mientras que las de orden par son de la forma $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, resulta entonces

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}\text{sen}\xi \quad , \quad \xi \in (0, x)$$

El motivo de elegir los desarrollos de Taylor de sen$x$ y cos$x$ en $x_0 = 0$ es debido a que estas funciones se comportan de una forma muy especial, ya que sus desarrollos en el origen son válidos para calcular el valor de dichas funciones para cualquier valor x; sin embargo, como ya hemos advertido anteriormente, esto no sucede, en general, y la aproximación sólo es válida para valores próximos al punto en el que se ha efectuado el desarrollo. Un ejemplo de esto lo constituye la función $f(x) = L(1 + x)$.

d) *Función logaritmo neperiano*, $f(x) = L(1 + x)$, *en* $x_0 = 0$

$$f(x) = L(1+x) \quad , \quad f(0) = 0 \qquad\qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad , \quad f^{(3)}(0) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad f'(0) = 1 \qquad\qquad f^{(4)}(x) = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4} \quad , \quad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad , \quad f^{(2)}(0) = -1 \qquad\qquad f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5} \quad , \quad f^{(5)}(0) = 4!$$

En general: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ Entonces:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} - \frac{3!x^4}{4!} + \frac{4!x^5}{5!} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!(1+\xi)^n}x^n, \quad 0 < \xi < x =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\xi)^n} \quad , \quad 0 < \xi < x$$

Si queremos calcular mediante la fórmula $L4$, tendremos que tomar $x = 3$ y los valores de los sucesivos polinomios de Taylor son:

$P_1(x) = x$, $P_1(3) = 3$

$P_2(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, $P_2(3) = -1{,}5$

$P_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$, $P_3(3) = 7{,}5$

$P_4(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$, $P_4(3) = -12{,}75$

$P_5(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5}$, $P_5(3) = 35{,}85$

Sin embargo, el valor de $L4$ es 1,3862944, lo que nos indica que en este caso la fórmula de Taylor no nos vale para calcular los valores de $L4$.

Para encontrar en qué puntos los polinomios de Taylor aproximan a la función f se debe encontrar aquellos x tales que $\lim_{n\to\infty} R_n(x_0) = 0$ (R_n es el resto de Taylor). En el ejemplo de $f(x) = L(1+x)$ se puede demostrar fácilmente que los polinomios de Taylor en el origen aproximan a la función en aquellos x tales que $x \in]-1, 1]$ y, por tanto, son válidos para calcular los valores de Lx para $x \in]0, 2]$.

Si se desea encontrar una aproximación para $L4$ tenemos que desarrollar en serie la función $L(a+x)$, donde a es un punto próximo a 4; en este caso puede elegirse $a = 3$.

Ejercicios:

1. Encontrar el desarrollo de Taylor de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = -1$

   c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

   d) $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

2. Si α es un número real y n un entero no negativo se define el coeficiente binomial generalizado como $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$.

   Encontrar el polinomio de Taylor de grado n de $f(x) = (1+x)^\alpha$.

   Hallar el desarrollo de Taylor en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Obtener los cinco primeros términos de la fórmula de Mac-Laurin para las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \text{tg}x$
   b) $f(x) = \cot x$
   c) $f(x) = \text{arc sen}x$
   d) $f(x) = \text{arc tg}x$
   e) $f(x) = \text{arc cos}x$

5 APLICACIONES DEL TEOREMA DE TAYLOR

Se ha visto en los párrafos anteriores que el desarrollo de Taylor de una función sirve para calcular de forma aproximada los valores de la función en puntos suficientemente próximos a aquel en que se ha realizado dicho desarrollo.

Vamos a ver a continuación otras aplicaciones.

a) *Cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión*

Ya hemos visto que si f es una función continua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ y derivable, entonces si $x_0 \in]a, b[$ es un máximo o mínimo, debe verificarse que $f'(x_0) = 0$. Para determinar si este punto corresponde a un máximo o mínimo se recurre a la segunda derivada de f en x_0 (supuesto que exista); en este caso si $f''(x_0) > 0$, x_0 corresponde a un mínimo, y si $f''(x_0) < 0$, x_0 corresponde a un máximo. Sin embargo, no podemos asegurar nada en el caso de que $f''(x_0) = 0$ (de hecho, x_0 puede no corresponder ni a un máximo ni a un mínimo). El siguiente teorema nos permite afinar el estudio de los máximos y mínimos.

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que existan las n primeras derivadas de f en $]a, b[$ y sea $x_0 \in]a, b[$. Supongamos que

$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(x_0) \neq 0; \text{ entonces:}$$

Si $f^{(n)}(x_0) > 0$ *y* n *es par,* f *tiene un mínimo en* x_0.

Si $f^{(n)}(x_0) < 0$ *y* n *es par,* f *tiene un máximo en* x_0.

Si n *es impar,* f *tiene un punto de inflexión en* x_0.

Desarrollando f en un entorno de x_0, se ha visto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Pero como $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0) - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$$

entonces, en un cierto entorno de x_0, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$ tiene el mismo signo que $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, y n es par, entonces $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$ es positivo en un entorno de x_0; como n es par, $(x - x_0)^n$ es positivo, y por tanto, $f(x) - f(x_0) > 0$ y $f(x) > f(x_0)$. De aquí que f tenga un mínimo relativo en x_0.

Si $f^n(x_0) < 0$ y n es par, resulta $f(x) < f(x_0)$ en un cierto entorno de x_0; por tanto, f tiene un máximo relativo en x_0.

Supongamos n impar:

Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces en un cierto entorno de x_0,

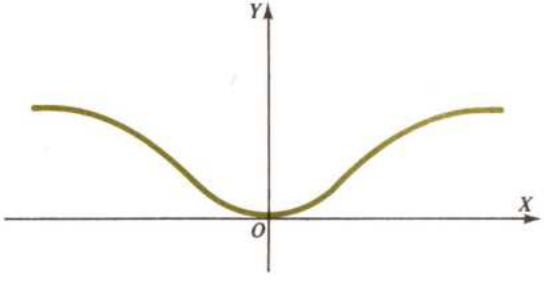
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0$, pero entonces en dicho entorno si $x > x_0$, $(x - x_0)^n > 0$ y $f(x) > f(x_0)$, y si $x < x_0$, $(x - x_0)^n < 0$, y $f(x) < f(x_0)$, luego x_0 es un punto de inflexión. De la misma forma se razona si $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Nota: La regla anterior, aunque más fuerte que lo estudiado anteriormente para la determinación de máximos y mínimos, no resuelve el problema en todos los casos; por ejemplo, la función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene la propiedad de que para todo $f^{(n)}(0) = 0$, por lo que el criterio no nos dice nada acerca de la existencia de máximo o mínimo en $x_0 = 0$. La gráfica de la función es la indicada en la figura 3 y posee en dicho punto un mínimo.



(Fig. 3)

b) *Cálculo de límites*

La fórmula de Taylor puede también aplicarse al estudio de límites, como se indica en los siguientes ejemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{(x - \operatorname{sen} x)(x + \operatorname{sen} x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

Sabemos que $\operatorname{sen}x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$ luego $x - \operatorname{sen}x = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$

$$x + \operatorname{sen}x = 2x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

Para valores próximos a cero podemos despreciar los términos siguientes al primero, es decir,

$$x - \operatorname{sen}x \sim \text{(aproximadamente)}\ \frac{x^3}{3!}$$

$$x + \operatorname{sen}x \sim 2x$$

luego $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x - \operatorname{sen}x)(x + \operatorname{sen}x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^3}{3!}2x}{x^2x^2} = \dfrac{1}{3}$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen}x}{x(1 - \cos 3x)}$

Ya se ha visto que $x - \operatorname{sen}x \sim \frac{x^3}{3!}$; del desarrollo de $\cos 3x$ en $x_0 = 0$ se tiene $\cos 3x = 1 - \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^4}{4!} + \cdots$ luego $1 - \cos 3x \sim \frac{9x^2}{2!}$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}x}{x(1 - \cos 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3!} : \frac{x \cdot 9x^2}{2!} = \frac{1}{27}$$

c) *Irracionalidad de e*

e es irracional, es decir, no existen números enteros a y b tales que $e = \frac{a}{b}$. En efecto, del desarrollo de Taylor de e^x en $x_0 = 0$ se sigue que $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots +$ $+ \frac{1}{n!} + R_n$, (R_n resto de Taylor), supongamos que fuese $e = \frac{a}{b}$ y elijamos $n > b$ y $n > 3$:

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n, \text{ entonces}$$

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + R_n n!$$

Todos los términos de esta expresión, a excepción de $n!R_n$, son enteros; por tanto, así debe suceder con $n!R_n$.

Aplicando el teorema de Taylor en [0, 1]

$$R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!},\ 0 < \xi < 1, \text{ luego } 1 < e^\xi < 3$$

(recuérdese que $e = 2{,}71828...$); entonces $0 < R_n < \dfrac{1}{(n+1)!}$, pero esto nos lleva a una contradicción, pues si $n > 3$, $\dfrac{3}{(n+1)!} < 1$ y no existe ningún número entero comprendido entre 0 y 1.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CURVAS (EN FORMA EXPLÍCITA)

Sabemos de cursos anteriores que los pasos para representar gráficamente una curva en forma explícita, es decir, en la forma $y = f(x)$, son las siguientes:

1. Determinación del dominio de definición.
2. Cortes a los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento. Se estudia el signo de la primera derivada $f'(x)$. En los intervalos en los que f' es positiva, la curva es creciente; en los que es negativa, decreciente.
5. Se calculan los máximos y mínimos.
6. Concavidad en aquellos intervalos en los que la segunda derivada es positiva y cóncava hacia $-OY$ en aquellos que es negativa.
7. Se calculan los puntos de inflexión.
8. Asíntotas y estudio de la posición de la curva respecto de las asíntotas.
9. Estudio de las regiones de existencia de la curva.

Finalmente, y dependiendo del tipo particular de la curva a estudiar, se pueden deducir algunas características de la curva, como pueden ser cortes de la curva con las asíntotas, puntos en que la curva no tiene derivada, etc.

Ejemplos:

- Construir la curva $y = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

  La curva está definida en todos los puntos de la recta real.

  Cortes al eje OY:

  $$x = 0 \Rightarrow \quad y = 6;\ P_1(0,6)$$

  Cortes al eje OX:

  $$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & P_2(1,0) \\ x = -2 & ;\ P_3(-2,0) \\ x = 3 & P_4(3,0) \end{cases}$$

  No tiene simetrías ni asíntotas.

  Intervalos de crecimiento:

  $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

  $y' = 3x^2 - 4x - 5$

  $y' = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3},\ x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3}$

x	$-\infty < x < \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3}$	$\dfrac{2 - \sqrt{19}}{3} < x < \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3}$	$\dfrac{2 + \sqrt{19}}{3} < x < \infty$
y'	+	−	+
y	Creciente	Decreciente	Creciente

Máximos y mínimos:

$y'' = 6x - 4$

Para $x = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3}$, $y'' < 0$. Máximo.

Para $x = \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3}$, $y'' > 0$. Mínimo.

Puntos de inflexión:

$y'' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

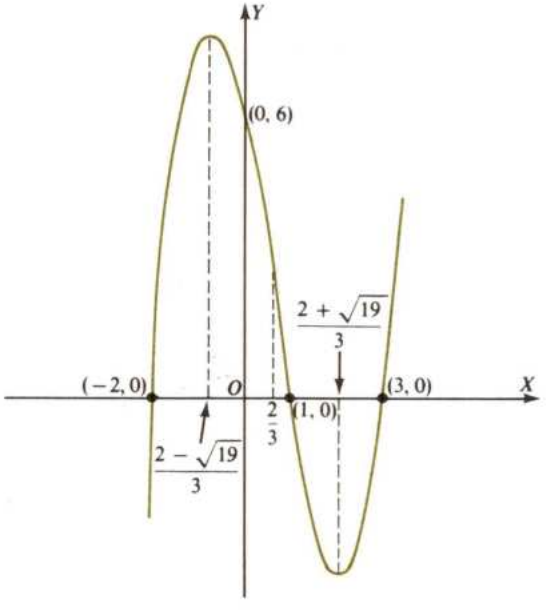
$y''' = 6 \neq 0.$

Punto de inflexión $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{56}{27}\right)$.

Concavidad:

x	$-\infty < x < \dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3} < x < \infty$
y''	$-$	$+$
y	Cóncava hacia $-OY$.	Cóncava hacia $+OY$.

(Ver figura 4)



(Fig. 4)

• Construir la curva $y = \dfrac{x^2(2x-1)}{2x^2-1}$

La curva está definida en todos los puntos, excepto $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Cortes al eje OY:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0,0)$$

Cortes al eje OX:

$$y = 0 \Rightarrow x^2(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ x = \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2},0 \end{cases}$$

No tiene simetrías.

Asíntotas verticales:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } x = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Asíntotas horizontales: No tiene.

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2x-1)}{2x^3 - x} = 1$$

$$p = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2(2x-1)}{2x^2-1} - x \right) = -\frac{1}{2}$$

Asíntota oblicua: $y = x - \dfrac{1}{2}$.

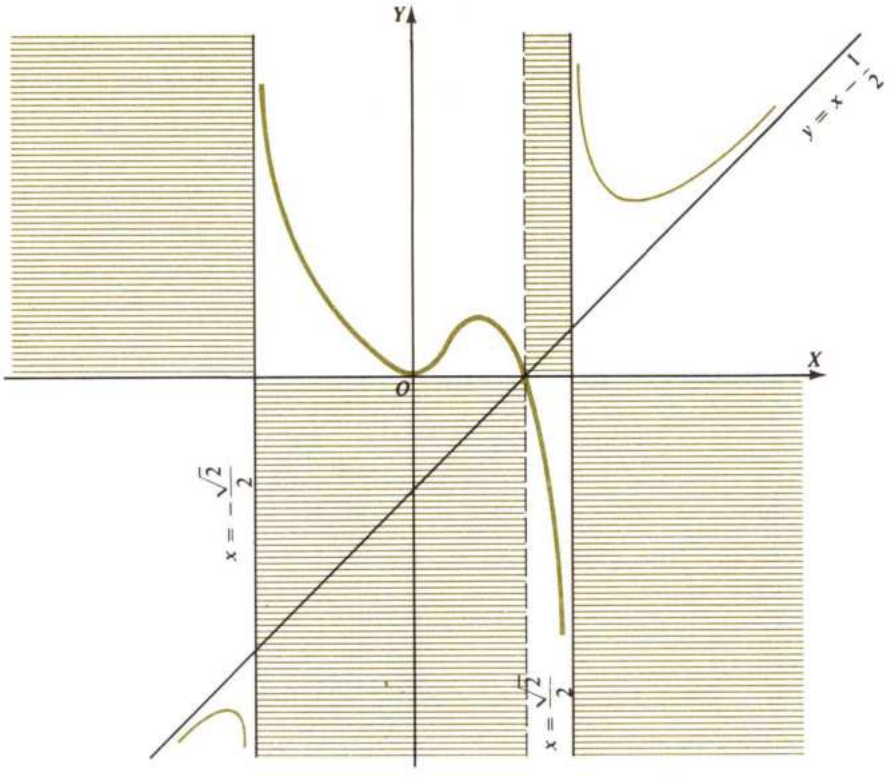
Para $x \to \infty$ la curva está por encima de la asíntota oblicua, y para $x \to -\infty$ la curva está por debajo de la asíntota oblicua.

A continuación se pueden calcular los máximos y mínimos, pero esto conduce a resolver una ecuación general de cuarto grado, lo que no estamos en condiciones de hacer.

Se puede, sin embargo, obtener una idea de la curva estudiando las regiones.

x	$-\infty < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \infty$
Numerador	−	−	−	+	+
Denominador	+	−	−	−	+
y	−	+	+	−	−

Con estos datos resulta la figura 5 de la página siguiente.



(Fig. 5)

Ejercicio:

Representar las siguientes curvas:

a) $y = x^4 - 2x^2$

b) $y = 2x^2 - x + 1$

c) $y = x^3 + 5x - 18$

d) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

e) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

g) $y = Lx - x$

EJERCICIOS FINALES

1. Desarrollar en serie de potencias de $x - a$ los polinomios:
   a) $2x^3 - 3x^2 - x + 4,\ a = 1$
   b) $x^2 + x + 1,\ a = -1$
   c) $\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 5x + 3,\ a = 2$
   d) $x^4 - 3x^2 + x + 1,\ a = \frac{1}{2}$

2. Encontrar los polinomios de Taylor de cuarto grado en x_0 de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$
   b) $f(x) = e^{e^x}$ en $x_0 = 0$
   c) $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$
   d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ en $x_0 = 0$

3. Demostrar que $e^x - \cos x$ y x son infinitésimos equivalentes en $x_0 = 0$ y calcular
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 1)(e^x - \cos x)}{(3 + x^2)\operatorname{sen} x}$$

4. Demostrar que $x \cos x - L(1 + x)$ y $\frac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes en $x_0 = 0$.

5. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{(e^{3x} - \cos 3x)x^4}{(x + x^4)[x \cos x - L(1 + x)]^2}$.

6. Calcular e con cuatro cifras decimales exactas.

7. Calcular $\sqrt[5]{1{,}035}$ con tres cifras decimales exactas.

8. ¿Cuántos términos es necesario tomar en el desarrollo de Taylor para obtener $\cos 1^0$ con error menor que 0,001?

9. Desarrollar en serie de Taylor hasta el cuarto orden de las funciones en los puntos que se indican:
   a) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$, en $x_0 = 0$
   b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, en $x_0 = 0$
   c) $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x$, en $x_0 = 0$
   d) $f(x) = Lx$, en $x_0 = 1$
   e) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$, en $x_0 = 0$
   f) $f(x) = \sqrt{1 + 3x}$, en $x_0 = 1$

10. Calcular, utilizando el teorema de Taylor, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\operatorname{tg} 2x}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - L(1 + x)}{1 - \cos \dfrac{1}{2} x}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$

11. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = -x^6$

MACLAURIN (Colin)

Matemático escocés (1698-1746). En su *Tratado de fluxiones*, publicado en 1742, utilizó una fórmula que es un caso particular de la fórmula de Taylor; pero, en verdad, la fórmula de Maclaurin ya había sido utilizada en 1717 por el matemático James Sterling (1692-1704).

TAYLOR (Brook)

Matemático inglés (1685-1731). En su obra *Métodos de los incrementos directos e inversos* (1715) aparecen el teorema y el desarrollo en serie que llevan su nombre. Su fórmula se hace extensiva a las funciones de varias variables y a las funciones de variable compleja.

TEMA 18 RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES

La primera parte de este tema se dedica al estudio de las ecuaciones algebraicas con coeficientes racionales. En primer lugar se da un método para calcular las raíces enteras de una ecuación algebraica y después, mediante una sencilla transformación, el cálculo de las raíces racionales no enteras se reduce al método anterior. Después se estudia la separación y la aproximación de las raíces de una ecuación no necesariamente algebraica.

La aproximación de raíces, es decir, el cálculo de un valor aproximado de la misma con un error menor que un cierto número dado se realiza por dos métodos, el de falsa posición o «regula falsi» y el método de Newton.

1 ECUACIONES

1.1. Consideremos una función real de variable real

$$f\colon\ ]a,\ b[\ \to \mathbb{R}$$

donde $]a,\ b[$ puede ser igual a $\mathbb{R}$.

Dado $c \in \mathbb{R}$ ¿existe algún $\alpha \in]a,\ b[$ tal que $f(\alpha) = c$? Si f es una aplicación sobreyectiva, c existe. Estudiar la existencia de α y, en caso afirmativo, calcularlo es el problema de resolver la ecuación $f(x) = c$, entonces, α se dice que es una *solución* o *raíz* de la ecuación.

Disponemos de algoritmos para resolver algunos tipos de ecuaciones sencillas como son los casos en que f es un polinomio de grado 1 ó 2. También hay fórmulas que nos dan las soluciones de ecuaciones de grado 3 y 4, pero debido a su complicación no son manejables. Cuando se nos presente una ecuación polinómica de grado superior a 2 con coeficientes racionales veremos que se pueden calcular sus soluciones racionales. Ahora bien: no siempre las ecuaciones polinómicas tienen raíces racionales y no todas las ecuaciones son polinómicas. Para estos casos estudiaremos procedimientos que nos permitan calcular, de un modo aproximado, sus soluciones.

1.2. Sean $f(x) = c$, $g(x) = d$ dos ecuaciones. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución de ambas

$$f(\alpha) = c,\ g(\alpha) = d$$

se dirá que las ecuaciones son *equivalentes* respecto de la solución α.

Ejemplos:

- Las ecuaciones $f(x) = c$, $f(x) - c = 0$ son equivalentes respecto de todas sus posibles soluciones, ya que tienen las mismas. Diremos que son ecuaciones equivalentes.

  Llamando $F(x) = f(x) - c$, la segunda ecuación nos queda de la forma $F(x) = 0$.

  Todas las ecuaciones que consideremos a continuación las escribiremos de esta última forma.

- Las ecuaciones

$$F(x) = x - 1 = 0$$
$$G(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$$

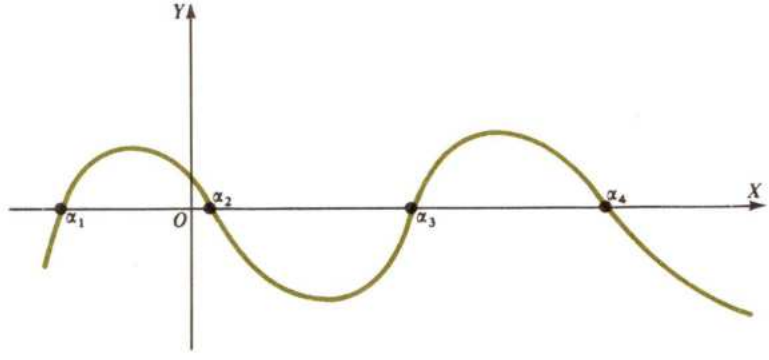
tienen una solución común $\alpha = 1$. Son equivalentes respecto de ésta.

- Observemos que si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, las ecuaciones

$$F(x) = 0 \quad \text{y} \quad a \cdot F(x) = 0$$

son equivalentes, tienen las mismas soluciones.

Gráficamente las soluciones de la ecuación $F(x) = 0$ son los puntos de corte de la función $y = F(x)$ con el eje $OX (y = 0)$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

Ejercicios:

1. Dadas las ecuaciones

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

decir si son equivalentes respecto de alguna solución.

2. ¿Son equivalentes las ecuaciones que escribimos a continuación?

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \quad ; \quad x^2 - 1 = 0$$

3. Escribir algunas ecuaciones equivalentes a

$$\operatorname{sen} x - 3 \cos x = 0$$

4. Calcular gráficamente las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

5. Calcular gráficamente las soluciones de la ecuación

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

6. Si $F(x) = 0$ es una ecuación, ¿qué significado geométrico tiene el que no posea ninguna solución? Observar qué pasa en la ecuación $e^x = 0$.

2 ECUACIONES ALGEBRAICAS

2.1. *Una ecuación $F(x) = 0$ se dice algebraica si $F(x)$ es una función polinómica.*

Si la ecuación $F(x) = 0$, contiene al menos una función transcendente a^x, $\log^x$, sen^x, etc., se dice que $F(x) = 0$ es una ecuación transcendente.

Ejemplos:

- La ecuación $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \pi x - 2 = 0$ es algebraica.
- La ecuación $\sqrt{x^2} + x + e^x - 3 = 0$ no es algebraica.

Si $F(x) = 0$ es una ecuación algebraica y α es una *raíz* $(F(\alpha) = 0)$ se dice que α es un *cero* de $F(x)$.

El teorema fundamental del álgebra, cuya demostración queda fuera del nivel de este curso, establece que toda ecuación algebraica con coeficientes complejos (en particular, con coeficientes reales) tiene al menos una raíz que puede ser real o compleja.

Sea $F(x) = 0$ una ecuación algebraica. Por el teorema fundamental del álgebra existe una raíz α (real o compleja), es decir, $F(\alpha) = 0$, entonces $x - \alpha$ divide a $F(x)$. Si $(x - \alpha)^n$ divide a $F(x)$ y $(x - \alpha)^{n+1}$ no divide a $F(x)$ se dice que α es una *raíz múltiple de orden n de* $F(x)$.

Como consecuencia del teorema fundamental toda ecuación algebraica $F(x) = 0$ de grado n tiene exactamente n raíces (en general, complejas) contadas cada una con su orden de multiplicidad.

2.2. Si $F(x) = 0$ es una ecuación algebraica con coeficientes reales y tiene una raíz compleja $z = a + bi$ $(b = 0)$, entonces su conjugada es también raíz de la ecuación.

En efecto: supongamos $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$; con $a_n, \ldots . a_0$ reales; entonces

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \text{ y } f(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1}, \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_0$$

y teniendo en cuenta las propiedades del conjugado de un número complejo

$$f(\bar{z}) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ es decir, } F(\bar{z}) = 0$$

Resulta de lo anterior que si $F(x) = 0$ es una ecuación algebraica con coeficientes reales y de grado impar, entonces debe tener al menos una raíz real.

Si $F(x)$ es un polinomio de grado n y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son raíces de $F(x) = 0$, $F(x)$ se descompone en la forma

$$F(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

donde a es el coeficiente principal de $F(x)$.

Si aparecen raíces múltiples de $F(x) = 0$, el polinomio $F(x)$ se escribe en la forma

$$F(x) = a(x - \alpha_1)^{a_1}(x - \alpha_2)^{a_2} \ldots (x - \alpha_m)^{a_m}$$

donde $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$.

α_1 se dice que es una raíz de orden a_1, α_2 de orden a_2, etc.

2.3. Sea $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Si $F(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, se verifica:

a) $\alpha | a_0$, es decir, α divide a a_0

b) $(\alpha - 1) | F(1)$ $(\alpha \neq 1)$

c) $\alpha + 1 | F(-1)$ $(\alpha \neq -1)$

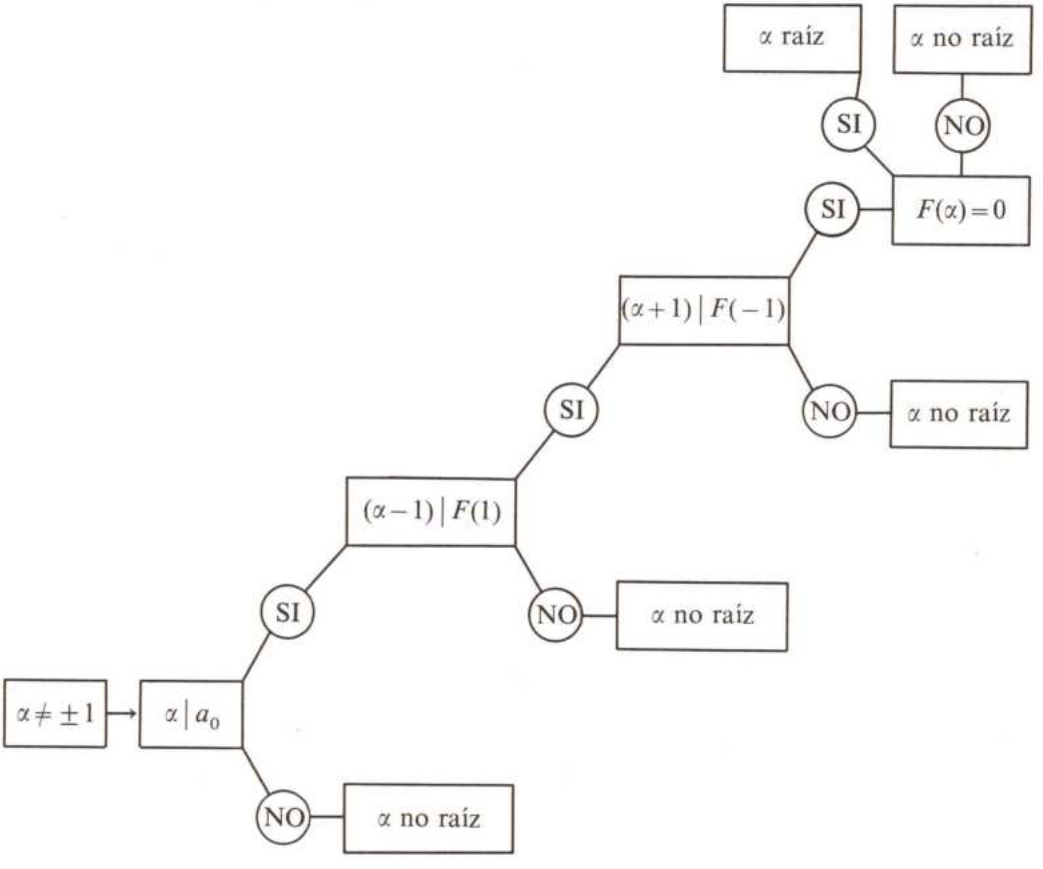
Efectivamente:

a) $0 = F(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 \Rightarrow -a_0 = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha$
$\Rightarrow -a_0 = \alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1) \Rightarrow \alpha | a_0$, ya que
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \in \mathbb{Z}$$

b) Si $F(\alpha) = 0 \Rightarrow F(x) = (x - \alpha)Q(x) \Rightarrow F(1) = (1 - \alpha)Q(1)$
$\Rightarrow F(1) = (\alpha - 1)(-Q(1)) \Rightarrow (\alpha - 1) | F(1)$, ya que $-Q(1) \in \mathbb{Z}$.

Análogamente se demuestra c).

Esta proposición nos facilita el siguiente organigrama para el cálculo de las raíces enteras de la ecuación $F(x) = 0$, siendo $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Calculamos $F(1)$ y $F(-1)$. Si $F(1) = F(-1) = 0 \Rightarrow 1$ y -1 son raíces.



Si α es raíz se tiene:

$$F(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

siendo $Q(x)$ un polinomio de grado $n - 1$ con coeficientes enteros. Observemos que si $\beta \neq \alpha$ es otra raíz de $F(x)$, entonces β es raíz de $Q(x)$, ya que

$$0 = F(\beta) = (\beta - \alpha)\ \ Q(\beta) \Rightarrow Q(\beta) = 0$$

Lo recíproco también es cierto. Si β es una raíz de $Q(x)$, β es una raíz de $F(x)$. Por tanto, una vez encontrada una primera raíz α de $F(x)$, buscamos una raíz de $Q(x)$, pues resulta más cómodo dado que $Q(x)$ es de un grado menor que $F(x)$, y así sucesivamente.

Ejemplos:

- Consideremos la ecuación $F(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 3x + 8 = 0$

  Calculemos sus raíces enteras:

  $$F(1) = 1 - 3 + 6 - 3 + 8 = 9$$
  $$F(-1) = -1 - 3 + 6 + 3 + 8 = 13$$

  Los divisores de 8 son: $D(8) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8\}$

  Como 13 es un número primo, no tiene ningún divisor propio. Además $F(1) \neq 0$, $F(-1) \neq 0$; luego 1, -1 no son raíces de la ecuación. Por otra parte toda raíz entera α es un divisor de 8.

  La ecuación no tiene raíces enteras.

- Busquemos las raíces enteras de la ecuación:

  $$F(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$$

  Se tiene:

  $D(18) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 18\}$

  $F(1) = 1 - 1 - 11 + 9 + 18 = 16$

  $F(-1) = 1 + 1 - 11 - 9 + 18 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz.

  El conjunto de las posibles raíces enteras de $F(x) = 0$ viene dado por (observemos que $F(-1)$ es divisible por cualquier número entero):

  $$\{\alpha \in D(18); (\alpha - 1) | 16\} = \{-1,\ 2,\ 3,\ -3,\ 9\}$$

  Sabemos ya que -1 es una raíz. Veremos a continuación si -1 es raíz doble, triple, etc. Luego probamos lo mismo con 2, 3, -3, 9.

	1	-1	-11	9	18	
-1		-1	2	$+9$	-18	
	1	-2	-9	18	$\boxed{0}$	-1 es raíz
-1		-1	3	6		
	1	-3	-6	$\boxed{24 \neq 0}$		-1 no es raíz doble
	1	-2	-9	18		
2		2	0	-18		
	1	0	-9	$\boxed{0}$		2 es raíz
2		2	4			
	1	2	$\boxed{-5 \neq 0}$			2 no es raíz doble

	1	0	−9	
3		3	9	
	1	3	[0]	3 es raíz
3		3		
	1	[6 ≠ 0]		3 no es raíz doble
	1	3		
−3		−3		
	1	[0]		3 es raíz

Como $F(x)$ es de grado 4 y tenemos 4 raíces, no buscamos más. Se tiene la siguiente descomposición:

$$F(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 3)$$

Obsérvese que una vez calculadas las raíces -1, 2 podemos escribir

$$F(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 9)$$

El resto de sus raíces son las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - 9$, que se resuelve directamente.

2.4. *La ecuación algebraica con coeficientes enteros:*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

no tiene raíces racionales no enteras.

En otras palabras, las posibles raíces racionales de la ecuación son enteras.

En efecto.

Supongamos $\frac{p}{q} \in Q$, $q \neq 1$ una fracción irreducible (p, q primos entre sí) que es raíz de la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Entonces se tendría:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \Rightarrow p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0q^n = 0 \Rightarrow$$

$$p^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_0q^n) \Rightarrow$$

$$p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_0q^{n-1}) \Rightarrow q|p^n$$

lo que es absurdo, pues p y q son primos entre sí.

Ejemplos:

- La ecuación

$$F(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$$

no tiene raíces racionales, ya que $F(1) \neq 0$, $F(-1) \neq 0$.

- Calculemos las raíces racionales de la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 2 = 0$$

Esta sólo tiene raíces racionales enteras, pues el coeficiente principal de $F(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2 = 0$ es 1.

Sus posibles raíces enteras son los divisores de 2:

$$D(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - 3 + 2 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{no es raíz.} \\ F(-1) &= 1 + 3 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow -1 \text{ es raíz.} \\ \left.\begin{aligned}(2-1) &= 1 \text{ divide a } F(1) \\ (2+1) &= 3 \text{ divide a } F(-1)\end{aligned}\right\} &\Rightarrow 2 \text{ puede ser una raíz.} \\ (-2-1) &= -3 \text{ no divide a } F(1) \Rightarrow -2 \text{ no es raíz.} \\ F(2) &= 16 - 3 - 8 + 2 \cdot 2 - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow 2 \text{ no es raíz.} \end{aligned}$$

La única raíz racional es $\alpha = -1$.

Daremos a continuación un procedimiento para calcular las raíces racionales de una ecuación algebraica con coeficientes enteros y cuyo coeficiente principal no sea 1.

2.5. Consideremos la ecuación algebraica con coeficientes enteros

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Haciendo $x = \dfrac{z}{a_n}$ se tiene:

$$a_n \left(\frac{z}{a_n}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \Rightarrow \frac{z^n}{a_n^{n-1}} + a_{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \; [1]$$

Multiplicando por a_n^{n-1}, se tiene:

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0 \cdot a_n^{n-1} = 0$$

que es una ecuación equivalente a [1] con coeficientes enteros y coeficiente principal 1.

Por tanto, sólo tiene raíces racionales enteras. Si α es una de éstas, $\dfrac{\alpha}{a_n}$ es una raíz racional (que puede ser entera) de

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Ejemplo:

- Dada la ecuación $4x^3 + 8x^2 + x - 3 = 0$, calculemos sus raíces racionales.

Hacemos la transformación $x = \dfrac{z}{4}$

$$4\left(\frac{z}{4}\right)^3 + 8\left(\frac{z}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right) - 3 = 0 \Rightarrow \frac{z^3}{4^2} + 8\frac{z^2}{4^2} + \frac{z}{4} - 3 = 0$$

Multiplicamos por 4^2 la anterior ecuación:

$$z^3 + 8z^2 + 4z - 3 \cdot 4^2 = 0$$

Es una ecuación que tiene los coeficientes enteros y coeficiente principal 1. Por tanto, si tiene algunas raíces racionales, éstas son enteras. Calculemos éstas.

Los divisores del término independiente son:

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 16,\ \pm 24,\ \pm 48\}$$

Llamando $F(z) = z^3 + 8z^2 + 4z - 48 = 0$

$$F(1) = 1 + 8 + 4 - 48 = -35 \quad ; \quad F(-1) = -1 + 8 - 4 - 48 = -45$$

Las posibles raíces enteras de la ecuación (que verifican las condiciones b) y c) de **2.3**) son:

$$\{2,\ -4,\ -6,\ 8\}$$

	1	8	4	−48
2		2	20	48
	1	10	24	$\boxed{0}$

$\Rightarrow 2$ es raíz

Resolvemos directamente la ecuación de segundo grado

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{-10 \pm 2}{2} = \begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases}$$

Las raíces de $F(z) = 0$ son $z_1 = 2$, $z_2 = -4$, $z_3 = -6$.

Como $x = \frac{z}{4}$, las raíces de $4x^3 + 8x^2 + x - 3 = 0$ serán

$$x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1, \quad x_3 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

2.6. Supongamos ahora una ecuación algebraica

$$G(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$$

cuyos coeficientes son racionales. Podemos transformarla en otra equivalente cuyos coeficientes sean enteros. Por tanto, el problema de calcular las raíces racionales de $G(x) = 0$ se reduce a calcular raíces racionales de una ecuación algebraica con coeficientes enteros equivalentes. La transformación se logra multiplicando la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes.

Ejemplo:

- La ecuación

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

se transforma, multiplicándola por 30, en:

$$10x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 15x + 30 = 0$$

que es equivalente a la primera y de coeficientes enteros.

Ejercicios:

1. Demostrar que si α es una raíz entera de la ecuación algebraica con coeficientes enteros

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

se verifica que $\alpha + 1$ divide a $F(-1)$.

2. Calcular las raíces enteras de las ecuaciones

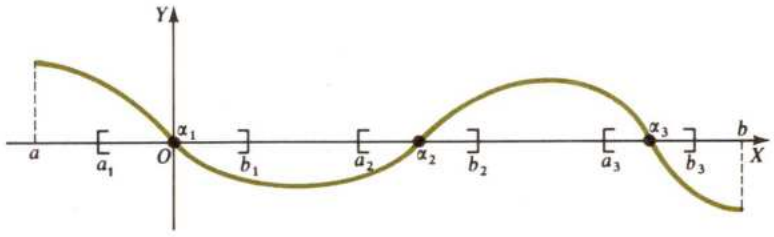
a) $2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ b) $x^5 + 9x^4 + 15x^3 - 45x^2 - 88x + 60 = 0$

3. Calcular las raíces racionales de las ecuaciones
   a) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12 = 0$
   b) $6x^3 - 25x^2 + 3x + 4 = 0$
   c) $2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$
4. Calcular las raíces racionales de las ecuaciones
   a) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$
   b) $x^3 - \frac{3}{2}x^3 + 3x - \frac{9}{2} = 0$
5. ¿Tiene alguna raíz racional la ecuación
$$x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x + 5 = 0?$$
6. Demostrar que si α es una raíz múltiple de la ecuación algebraica
$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$
es una raíz del máximo común divisor de los polinomios $F(x)$ y $F'(x)$.
7. Calcular las raíces múltiples enteras (si existen) de las ecuaciones
   a) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = 0$
   b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$
   aplicando el resultado del problema anterior.

3 RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES

Dada una ecuación
$$F(x) = 0$$
estudiaremos en este párrafo métodos de aproximación de sus soluciones reales. Supondremos, en lo que sigue, que la función $F(x)$ es continua donde esté definida.

3.1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, son tales que $F(a)$ y $F(b)$ tienen signos distintos, el teorema de Bolzano afirma que existe por lo menos un punto $c \in]a, b[$ tal que $F(c) = 0$. Es decir, que la ecuación $F(x) = 0$ tiene al menos una solución entre a y b. Sin embargo, puede tener varias soluciones. Un primer paso a realizar, antes de aproximar las raíces de una ecuación, es «aislarlas», es decir, encontrar intervalos cerrados en cada uno de los cuales sólo exista una raíz (Fig. 2). Este proceso se llama *separación de raíces*.



(Fig. 2)

Si α_1 es la única raíz de $F(x) = 0$ en el intervalo $[a_1, b_1]$, cualquier punto de éste es una aproximación de α_1 con un error menor que máx$(\alpha_1 - a_1, b_1 - \alpha_1)$. Cuanto menor sea la longitud del intervalo $[a_1, b_1]$, menor es el error cometido.

Damos a continuación un teorema que nos servirá de criterio para separar raíces. Con él se determina cuándo en un intervalo existe una única raíz de $F(x) = 0$.

3.2. Sea F una función tal que $F(a)$ y $F(b)$ tienen signos distintos. Supongamos

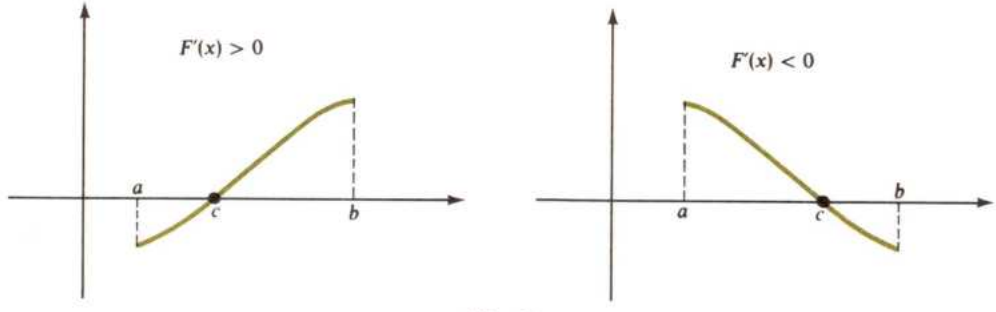
a) F derivable en $]a, b[$

b) $F'(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$ (o $F'(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$)

Entonces existe un único $c \in]a, b[$ tal que $F(c) = 0$.

Demostración

El teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de c. Ahora bien: como $F'(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$ ($F'(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$), la función es creciente (decreciente) en todo $[a, b]$. Por tanto, $F(x)$ sólo corta a la recta $y = 0$ en un único punto (Fig. 3).



(Fig. 3)

Ejemplo:

- Separemos las raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$.

  Sea $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Se tiene:

  $$F(0) = -1; \quad F(1) = -1; \quad F(2) = 1$$

  F cambia de signo en el intervalo $[1, 2]$. Por tanto, la ecuación $F(x) = 0$ tiene alguna raíz en $[1, 2]$. Veamos si hay una sola. Para ello calculamos $F'(x)$.

  $$F'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

  La ecuación $F'(x) = 0$ es de segundo grado. Resolviendo obtenemos que tiene por raíces $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Por tanto, $F'(x)$ mantiene el signo en $]1, 2[$. Como consecuencia del teorema anterior, $F(x) = 0$ tiene una única solución en $[1, 2]$. Además

  $$\forall x < 1 \quad F(x) < 0; \quad \forall x > 2 \quad F(x) > 0$$

  Por tanto, $F(x)$ tiene una única solución real, que está en $[1, 2]$.

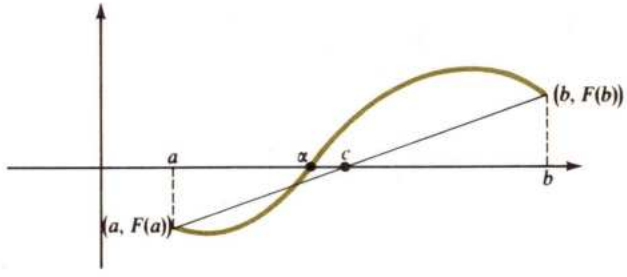
  Cualquier punto de $[1, 2]$ es una aproximación de la raíz de $F(x)$.

  Enunciamos a continuación métodos de aproximación de raíces, una vez que éstas estén separadas.

3.3. *Método de «regula falsi» o de falsa posición.*

Consideremos la ecuación $F(x) = 0$. Suponemos que éste tiene una única raíz en $]a, b[$ y que además $F(a)$ y $F(b)$ tienen signos distintos.

Este método consiste en aproximar la solución de la ecuación (α) que existe entre a y b por la abscisa c del punto de intersección con OX de la cuerda que une $(a, F(a))$ con $(b, F(b))$ (Figura 4).



(Fig. 4)

Calculemos la ecuación de la cuerda

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y - F(a) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow$$

$$y = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)$$

El punto de corte con OX se obtiene haciendo $y = 0$

$$0 = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow x - a = \frac{-F(a)(b - a)}{F(b) - F(a)}$$

$$x = \boxed{a - \frac{F(a)(b - a)}{F(b) - F(a)} = c}$$

Este valor es una aproximación de la raíz de $F(x) = 0$ mejor que a o b. Partiendo de este punto y uno de los anteriores (a o b, según la raíz esté en $[a, c]$ o $[c, b]$), si volvemos a aplicar la regla, se obtiene una aproximación mejor, y así sucesivamente.

Ejemplos:

- La ecuación $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ tiene una única raíz, según el ejemplo anterior, en $[1, 2]$. Vamos a calcular una aproximación de ésta por el método de falsa posición.

  Si $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

  $F(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1$

  $F(2) = 8 - 8 + 2 - 1 = 1$

  una aproximación de la raíz es

$$c = a - \frac{F(a)(b - a)}{F(b) - F(a)} = 1 - \frac{(-1)(2 - 1)}{1 - (-1)} = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}50$$

Calculemos $F\left(\frac{3}{2}\right)$

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{8}$$

Por tanto, la raíz de $F(x) = 0$ está en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Si queremos conseguir una aproximación mejor, aplicamos de nuevo el método de falsa posición en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Así:

$$c' = \frac{3}{2} - \frac{F\left(\frac{3}{2}\right)\left(2 - \frac{3}{2}\right)}{F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{-5}{8}\right) \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{-5}{8}\right)} = \frac{3}{2} + \frac{5}{26} = \frac{44}{26} = \frac{22}{13} = 1{,}69230$$

Observemos que si tomamos como aproximación de la raíz de $F(x) = 0$ el valor $c = 1{,}50$, el error que cometemos es menor que $2 - 1 = 1$, ya que sabemos que la raíz está dentro de $[1, 2]$. Si aproximamos por $c' = 1{,}6923$ el error es menor que $2 - \frac{3}{2} = 0{,}5$, c' es mejor aproximación que c.

Aplicando reiterativamente este método iremos consiguiendo mejores aproximaciones. Dada la cantidad de operaciones a efectuar, para lograr una «buena» aproximación (con error muy pequeño) se hace inevitable el uso de una calculadora.

- Aproximemos una solución de la ecuación $x - \cos x = 0$ por el método de «regula falsi».

Los cálculos que siguen se han hecho con una calculadora. Conseguir buenas aproximaciones de la solución sin calculadora se hace extremadamente dificultoso en ecuaciones transcendentes como ésta: habría que disponer de unas tablas trigonométricas naturales y transformar continuamente grados en radianes.

Llamemos $F(x) = x - \cos x$. Separemos una raíz. Para ello calculamos valores de $F(x)$:

$F(0) = -1$
$F(0{,}5) = 0{,}5 - \cos 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}8775 = -0{,}3775$
$F(1) = 1 - \cos 1 = 1 - 0{,}5403 = 0{,}4597$

Hay alguna raíz en el intervalo $[0{,}5, 1]$. Intentemos reducir aún más en longitud este intervalo.
$F(0{,}75) = 0{,}75 - 0{,}7316 = 0{,}0184$
$F(0{,}65) = 0{,}65 - 0{,}7960 = -0{,}1460$

Por tanto, en $[0{,}65, 0{,}75]$ hay alguna raíz. Veamos si es única:
$F'(x) = 1 + \operatorname{sen} x > 0$, $\forall x \in [0{,}65, 0{,}75] \Rightarrow$ Existe una única raíz en el intervalo anterior.

Aplicamos la fórmula de «regula falsi» a dicho intervalo:

$$c = 0{,}65 - \frac{F(0{,}65) \cdot (0{,}75 - 0{,}65)}{F(0{,}75) - F(0{,}65)} = 0{,}65 - \frac{-0{,}1460 \cdot 0{,}10}{0{,}0184 - (-0{,}1460)} =$$

$$= 0{,}65 + \frac{0{,}0146}{0{,}1644} = 0{,}65 + 0{,}0888 = 0{,}7388$$

El error que cometemos al tomar como aproximación de α el valor 0,7388 sabemos que es menor que $0{,}75 - 0{,}65 = 0{,}1$.

Reiteremos de nuevo el proceso:

$$F(0{,}7388) = 0{,}7388 - \cos 0{,}7388 = 0{,}7388 - 0{,}7391 = -0{,}00047$$

La raíz se encuentra en $[0{,}7388,\ 0{,}75]$. Una nueva aproximación es:

$$c' = 0{,}7388 - \frac{F(0{,}7388)(0{,}75 - 0{,}7388)}{F(0{,}75) - F(0{,}7388)} = 0{,}7388 - \frac{(-0{,}00047)\cdot 0{,}0112}{0{,}0184 - (-0{,}00047)} \Rightarrow$$

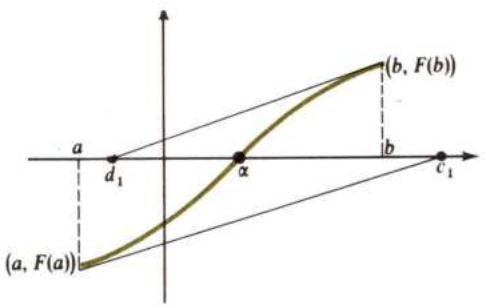
$$c' = 0{,}7388 + \frac{-0{,}00047 \cdot 0{,}0112}{0{,}01887} = 0{,}7388 + \frac{0{,}0000051}{0{,}01887} = 0{,}7388 + 0{,}00027 = 0{,}7391$$

c' aproxima la raíz con un error menor que $0{,}75 - 0{,}7388 = 0{,}0112$.

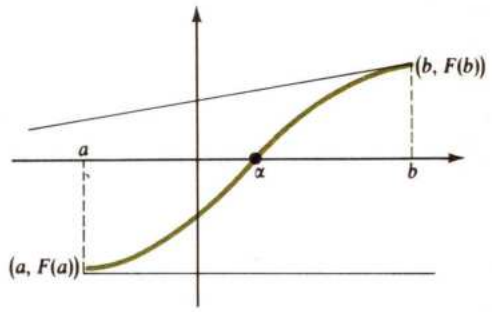
3.4. *Método de Newton.*

Supongamos como antes que $F(x) = 0$ tiene una única raíz en $[a,\ b]$ y que $F(a)$, $F(b)$ tienen signos distintos.

El método de aproximación de Newton consiste en tomar como raíz aproximada de $F(x) = 0$ *el punto de intersección con* OX *de una de las tangentes a la curva* $y = F(x)$ *en los puntos* $(a,\ F(a))$, $(b,\ F(b))$ $(c_1$ o $d_1)$ (Fig. 5).



(Fig. 5)



(Fig. 6)

Observemos en la figura que c_1 no es una buena aproximación de α, ya que queda fuera del intervalo $[a,\ b]$. En cambio d_1 es mejor aproximación que a o b, pues $d_1 \in [a,\ b]$. Pudiera ocurrir también que ambos puntos c_1, d_1 quedaran fuera del intervalo $[a,\ b]$, como muestra la figura 6.

El teorema que enunciamos sin demostrar a continuación da una condición suficiente para que el punto de intersección de una de las tangentes quede dentro del intervalo $[a,\ b]$.

Supongamos que $F(x)$ *es dos veces derivable en* $[a,\ b]$ *y que se verifican las siguientes condiciones*:

a) $F''(x)$ *mantiene el signo constante en* $[a,\ b]$.

b) $F''(a)$ *y* $F(a)$ *tienen el mismo signo.*

En estas condiciones se verifica que el punto que determina la tangente a $F(x)$ en $(a,\ F(a))$ con OX mejora la aproximación respecto de a.

Observemos que la condición de que $F''(x)$ tenga un signo constante en $[a,\ b]$ se traduce gráficamente en que la curva $y = F(x)$ no tenga puntos de inflexión en $[a,\ b]$.

Calculemos la ecuación de la tangente a $y = F(x)$ en $(a, F(a))$:

$$y - F(a) = F'(a)(x - a)$$

El corte con OX se obtiene haciendo $y = 0$:

$$-F(a) = F'(a)(x - a) \Rightarrow x = \boxed{a - \frac{F(a)}{F'(a)} = c_1}$$

Si $F(a)$ y $F''(a)$ tienen el mismo signo, c_1 es mejor aproximación que a.

Si $F(c_1) = 0$, c_1 es la raíz buscada.

Si $F(c_1) \neq 0$, reiterando el proceso a partir de c_1 se obtiene:

$$c_2 = c_1 - \frac{F(c_1)}{F'(c_1)}$$

que es mejor aproximación que c_1, y así sucesivamente.

En el caso de que $F(a)$ y $F''(a)$ tengan distinto signo, entonces $F(b)$ y $F''(b)$ tendrán igual signo y el valor será una aproximación de la raíz mejor que b.

$$\boxed{d_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)}}$$

será una aproximación de la raíz mejor que b.

El proceso, si queremos aproximar más dicha raíz, continuaría a partir de d_1.

Ejemplos:

- Aproximemos una raíz de la ecuación $x^3 + x^2 - 1 = 0$. Llamemos $F(x) = x^3 + x^2 - 1$. Para separar una raíz calculamos valores de $F(x)$:

  $F(0) = -1$

  $$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1 + 2 - 8}{8} = \frac{-5}{8}$$

  $$F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{9}{16} - 1 = \frac{27 + 36 - 64}{64} = \frac{63 - 64}{64} = \frac{-1}{64}$$

  $F(1) = 1$

  Hay alguna raíz en $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$. Veamos si hay una sola:

  $$F'(x) = 3x^2 + 2x > 0, \ \forall x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$$

  Por tanto, en $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ sólo hay una raíz. Aproximaremos ésta por el método de Newton. Este método nos vale, pues

  $$F''(x) = 6x > 0, \ \forall x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$$

$F''(1)$ y $F(1)$ tienen el mismo signo. Partimos del punto $x = 1$:

$$d_1 = 1 - \frac{F(1)}{F'(1)} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8$$

$F(0{,}8) = 0{,}512 + 0{,}64 - 1 = 0{,}152 \neq 0 \Rightarrow 0{,}8$ no es raíz. Reiteramos el proceso en $x = 0{,}8$:

$$d_2 = 0{,}8 - \frac{F(0{,}8)}{F'(0{,}8)} = 0{,}8 - \frac{0{,}152}{3{,}520} = 0{,}8 - 0{,}043 = 0{,}757$$

$d_2 = 0{,}757$ es mejor aproximación que 0,8, pero no es raíz:

$$F(0{,}757) = 0{,}433 + 0{,}573 - 1 = 1{,}006 - 1 = 0{,}006 \neq 0$$

La raíz se encuentra en el intervalo $[0{,}75,\ 0{,}757]$. El error que cometemos al aproximar ésta por 0,757 es menor que $0{,}757 - 0{,}75 = 0{,}007$.

Repitiendo el proceso en el punto $d_2 = 0{,}757$ obtendríamos una aproximación mejor, y así sucesivamente.

- Aproximemos una raíz de la ecuación

$$1 + \cos x - x = 0$$

Como vimos en un ejemplo anterior, el aproximar raíces de ecuaciones transcendentes se hace muy dificultoso si no se dispone de calculadora. Todos los cálculos que aparecen a continuación se han realizado con calculadora. Disponiendo de tablas naturales se podrían efectuar estos mismos cálculos, aunque no con tanta precisión, dependiendo ésta de las tablas naturales que utilicemos.

Llamemos $F(x) = 1 + \cos x - x$. Procedemos a separar las raíces:

$F(0) = 1 + 1 - 0 = 2$

$F(1) = 1 + \cos 1 - 1 = 0{,}5403$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq F(1{,}5707) \simeq 1 + \cos\frac{\pi}{2} - 1{,}5707 = -0{,}5707$ (1,5707 es una aproximación por defecto de $\frac{\pi}{2}$).

En el intervalo $[1,\ 1{,}5707]$ hay una raíz. Vemos que es única, ya que:

$$F'(x) = -\operatorname{sen} x - 1 < 0, \quad \forall x \in [1,\ 1{,}5707]$$

Como $F''(x) = -\cos x < 0$, $\forall x \in [1,\ 1{,}5707]$ el método de Newton nos sirve para aproximar la raíz de esta ecuación en $[1,\ 1{,}5707]$.

$F''(1{,}5707)$ y $F(1{,}5707)$ tienen el mismo signo. Partimos, por tanto, de $b = 1{,}5707$

$$d_1 = 1{,}5707 - \frac{F(1{,}5707)}{F'(1{,}5707)} = 1{,}5707 - \frac{-0{,}5707}{-2} = 1{,}5707 - 0{,}2853 = 1{,}2854$$

$$F(1{,}2854) = 1 + \cos 1{,}2854 - 1{,}2854 = 1 + 0{,}2815 - 1{,}2854 = -0{,}0039$$

d_1 no es raíz. Repitiendo el proceso en $d_1 = 1{,}2854$:

$$d_2 = 1{,}2854 - \frac{F(1{,}2854)}{F'(1{,}2854)} = 1{,}2854 - \frac{-0{,}0039}{-1{,}9595} = 1{,}2854 - 0{,}0019 = 1{,}2835$$

que mejora la aproximación.

Ejercicios:

1. Calcular, por el método de «regula falsi», alguna raíz aproximada de las ecuaciones:
   a) $x^3 - 2x - 5 = 0$
   b) $x^4 + 3x^3 + 1 = 0$
   c) $x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0$

2. Lo mismo que el problema 1, pero por el método de Newton.

3. (Para resolver con tablas trigonométricas naturales o con calculadora.) Calcular alguna raíz aproximada de las ecuaciones
   a) $\text{sen}x + 2 - x = 0$
   b) $x^2 + \text{sen}x - 1 = 0$

4. Calcular, de forma aproximada, una solución de la ecuación $\cos x + x^2 - 2 = 0$ con error menor que 0,01.

5. Supongamos que la ecuación $F(x) = 0$ se puede escribir de la forma equivalente:

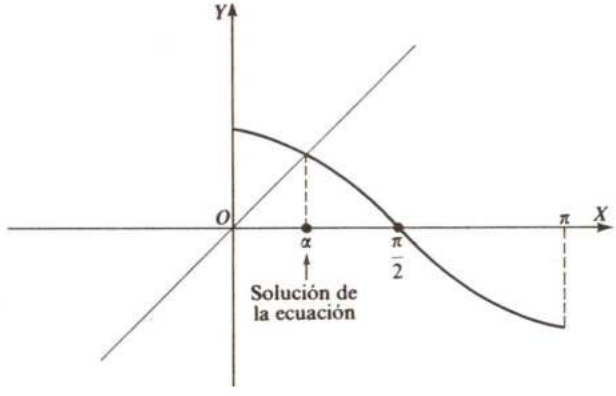
$$F_1(x) = F_2(x)$$

   Si representamos las funciones $F_1(x)$, $F_2(x)$, las abscisas de los puntos de intersección de $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son las soluciones de la ecuación $F(x) = 0$. Este es un método gráfico de resolución de ecuaciones.

   Así, por ejemplo, la ecuación $x - \cos x = 0$ se puede escribir

$$x = \cos x$$

   Representando $y = x$, $y = \cos x$, obtenemos gráficamente la solución de la ecuación $x - \cos x = 0$, como indica la figura 7.



(Fig. 7)

   Resolver gráficamente las ecuaciones:
   a) $5^x - x - 2 = 0$
   b) $\cos x + x^2 - 1 = 0$
   c) $\text{tg}x = x + 1$

EJERCICIOS FINALES

1. Calcular, si es que existen, las raíces enteras de las ecuaciones:
   a) $x^4 + 5x^3 - 18x^2 = 0$
   b) $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$
   c) $x^7 - x^6 + 2x^3 - 5x + 5 = 0$
   d) $x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 4x + 20 = 0$
   e) $x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 15x + 12 = 0$

2. Calcular, si es que existen, las raíces racionales de las ecuaciones:
   a) $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$
   b) $10x^3 + 3x^2 - 6x - 7 = 0$
   c) $2x^5 - 3x^3 + x - 1 = 0$
   d) $x^4 + 5x^3 - 18x^2 = 0$

3. Calcular una raíz aproximada de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$ con un error menor que 0,03.

4. Aproximar una raíz real de las ecuaciones
   a) $x^4 - 3x + 1 = 0$
   b) $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x - 0{,}75 = 0$
   c) $x^2 - 2\sqrt{x} + 0{,}5 = 0$
   d) $5x^5 - x - 3 = 0$

   con errores menores que 0,1.

5. Resolver, de forma aproximada, la ecuación
   $$5^x - x - 2 = 0$$

6. Calcular, de forma aproximada, una solución de la ecuación $\operatorname{tg} x = x + 1$ con un error menor que 0,001.

   (Utilizar tablas trigonométricas naturales o una calculadora.)

NEWTON (Isaac)

Matemático y físico inglés (1642-1727). Es uno de los más grandes científicos de todos los tiempos.

En Matemática fue el inventor (con Leibniz y de forma independiente) del cálculo infinitesimal (diferencial e integral). En Física, su contribución esencial fue la teoría de la gravitación universal.

TEMA 19 FUNCIONES PRIMITIVAS: INTEGRAL INDEFINIDA

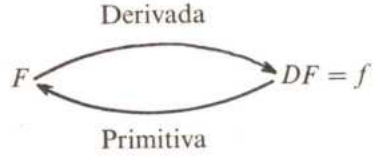
Este tema está dedicado a explicar las técnicas básicas de integración.

Se recuerdan los métodos de integración por «cambio de variable» y «por partes», ya estudiados en el último curso de Bachillerato.

Asimismo se calcula la integral indefinida de funciones racionales en todos los casos, excepto cuando el polinomio denominador tiene raíces complejas múltiples. También se dan métodos para integrar los tipos más importantes de funciones trigonométricas y para tipos muy particulares de funciones irracionales. Al final del tema se resuelven ecuaciones diferenciales de variables separadas. Es conveniente tener presente que es más importante para el lector familiarizarse con el método que recordar las fórmulas.

1 PRIMITIVAS DE UNA FUNCIÓN: PROPIEDADES

El concepto de primitiva de una función está relacionado con el de derivada. Es el paso inverso. Esquemáticamente:



Esta idea queda formalizada por la siguiente definición:

1.1. Sea $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que $F:]a, b[\to \mathbb{R}$, derivable en $]a, b[$, es una primitiva de f si $DF = f$.

Ejemplos:

- Cualquier función constante es una primitiva de la función $\theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(x) = 0$.
- Consideremos la función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \operatorname{sen} x + C$, siendo C un número real cualquiera. F es una primitiva de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.

Los dos ejemplos anteriores ponen de manifiesto que una función puede tener varias primitivas.

Generalizando podemos afirmar: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la función $F(x) + C$, donde C es una constante, es también una primitiva de $f(x)$ dado que:

$$D[F(x) + C] = DF(x) + 0 = Df(x) = f(x)$$

El siguiente teorema caracteriza todas las primitivas de una función f.

1.2. *Si* $F_1, F_2:]a, b[\to \mathbb{R}$ *son primitivas de* $f:]a, b[\to \mathbb{R}$, *entonces la diferencia* $F_1 - F_2$ *es una función constante.*

El teorema es consecuencia del teorema del valor medio del cálculo diferencial (ver tema 16).

Como consecuencia de este teorema, el conjunto de las primitivas de una función f viene dado por:

$$\{F + C / DF = f, C \in \mathbb{R}\}$$

1.3. Al conjunto anterior lo llamaremos *integral indefinida* de f y se denotará $\int f$ o $\int f(x)\, dx$. También se da este nombre a un elemento genérico de este conjunto.

Se tiene: $F \in \int f \Leftrightarrow DF = f$. También

$$F(x) \in \int f(x)\, dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplos:

- Como $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una primitiva de $f(x) = \cos x$
  $\int \cos x\, dx = \{\operatorname{sen} x + C / C \in \mathbb{R}\}$

  Brevemente escribiremos:

  $$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

- $F(x) = e^x$ es una primitiva de $f(x) = e^x$. Por lo tanto:

  $$\int e^x\, dx = \{e^x + C / C \in \mathbb{R}\}$$

  O bien:

  $$\int e^x\, dx = e^x + C$$

- $F(x) = L/x/$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Así:

  $$\int \frac{1}{x}\, dx = L/x/ + C$$

1.4. Designemos por $I(]a, b[)$ al conjunto de las funciones reales definidas en $]a, b[$, que tienen integral indefinida, y sea $\mathcal{F}(]a, b[)$ el conjunto de todas las funciones reales definidas en $]a, b[$.

$$I(]a, b[) = \{f:]a, b[\to \mathbb{R} / \exists\, F:]a, b[\to \mathbb{R},\ DF = f\}$$

es un *subespacio vectorial* de $\mathcal{F}(]a, b[)$.

Simbólicamente:

$$f \in I(]a, b[) \Leftrightarrow \exists \int f$$

Probemos que $I(]a, b[)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(]a, b[)$.

Si $f_1, f_2 \in I(]a, b[) \Rightarrow \exists\, F_1, F_2:]a, b[\to \mathbb{R}$, tal que $DF_1 = f_1$, $DF_2 = f_2 \Rightarrow$
$f_1 + f_2 = DF_1 + DF_2 = D(F_1 + F_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in I(]a, b[)$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}, f \in I(]a, b[) \Rightarrow \exists\, F:]a, b[\to \mathbb{R}$, tal que $DF = f \Rightarrow$
$\lambda f = \lambda DF = D(\lambda, F) \Rightarrow \lambda f \in I(]a, b[)$.

De las demostraciones anteriores se deducen los siguientes resultados:

1.4.a. *Si F_1, F_2 son primitivas de f_1 y f_2 respectivamente, entonces $F_1 + F_2$ es una primitiva de $f_1 + f_2$.* Por tanto:

$$\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$$

1.4.b. *Si F es una primitiva de f, λF es una primitiva de λf.* Se verifica:

$$\int (\lambda f) = \lambda \int f$$

Ejemplos:

- F_1, F_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $F_1(x) = e^x$, $F_2(x) = \operatorname{sen} x$ son primitivas, respectivamente, de las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \cos x$.

  Por lo tanto $(F_1 + F_2)(x) = e^x + \operatorname{sen} x$ es una primitiva de $(f_1 + f_2)(x)$.

  También se verifica:

$$\int (e^x + \cos x)\, dx = \int e^x\, dx + \int \cos x\, dx = e^x + \operatorname{sen} x + C$$

- Sabiendo que $\int x^3 = \dfrac{x^4}{5} + C$, por **1.4.b** deducimos que:

$\displaystyle\int 4x^3\, dx = 4 \int x^3\, dx = 4\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = x^4 + C'$, ya que si $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$ es una primitiva de $f(x) = x^3$, $4F(x) = x^4$ es una primitiva de $4f(x) = 4x^3$.

Ejercicios:

1. De entre las siguientes relaciones, indicar cuáles son ciertas y cuáles son falsas:
   a) $(3x^2 + 5) \in \int (x^3 + 2x)\, dx$
   b) $\operatorname{tg} x \in \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$
   c) $e^{x^2} \in \int 2xe^{x^2}\, dx$
   d) $(x^6 + 1) \in \int 6x^5\, dx$
   e) $\operatorname{sen} x \in \int \cos x\, dx$
   f) $\cos x \in \int \operatorname{sen} x\, dx$
2. Si F_1, F_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $F_1(x) = 3x^2 - x + 1$, $F_2(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, son primitivas de f_1, f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectivamente, calcular una primitiva de $\dfrac{1}{2}f_1 - 5f_2$.
3. Demostrar la siguiente relación:

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\, dx = c_1 \int f_1(x)\, dx + c_2 \int f_2(x)\, dx$$

   donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
4. Demostrar que:

$$\int [f_1(x) - f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx - \int f_2(x)\, dx$$

5. Sabiendo que $\displaystyle\int x^3\, dx = \frac{1}{4}x^4 + c$ y que $\displaystyle\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$, calcular: $\int (5x^3 - 2x^2)\, dx$.

---

2 PRIMITIVAS INMEDIATAS

2.1. Sea $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$. Sin más que recurrir a las fórmulas de derivación y aplicando la regla de la cadena, se obtiene la siguiente tabla de integrales indefinidas:

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = L|f(x)| + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{La} + C \quad ; \quad a > 0 \quad a \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen}[f(x)] f'(x)\, dx = -\cos[f(x)] + C$$

$$\int \cos[f(x)] f'(x)\, dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\, dx = \operatorname{tg}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]}\, dx = -\cot[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg}[f(x)] + C$$

Ejemplos:

- $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\, dx = \int x^{3/5}\, dx = \frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{5}{8} x^{8/5} + C$
- $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}\, dx = L|x^3 + x^2| + C$
- $\displaystyle\int \frac{e^{Lx}}{x}\, dx = e^{Lx} + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x^2 + 1)x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x^2 + 1)2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 1) + C$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (x^3 - 1)^2}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1 - (x^3 - 1)^2}}\, dx = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen}(x^3 - 1) + C$

Ejercicio:

Resolver las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (1 - x^2)\sqrt{x}\, dx$

b) $\int \frac{8x^2\, dx}{(x^3 - 2)^3}$

c) $\int (e^{2x} + 2)^5 e^{2x}\, dx$

d) $\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 1} dx$

e) $\int 3^{5x^2} x\, dx$

f) $\int \text{tg}x\, dx$

g) $\int \text{cotg}x\, dx$

h) $\int \text{sen}e^x e^x\, dx$

i) $\int \left(\text{sen}x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$

j) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx$

k) $\int \frac{dx}{x\, \text{sen}^2(Lx)}$

l) $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

m) $\int \frac{x}{1 + (x^2 - 2)^2} dx$

n) $\int \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{1 - (x^3 - 2x)^2}} dx$

o) $\int \frac{x}{2 + x^4} dx$

p) $\int \frac{\cos x}{1 + \text{sen}^2 x} dx$

q) $\int \text{sen}x \cos x(\text{sen}x + \cos x)\, dx$

3 INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Consideremos la composición de funciones $h(x) = F(u(x))$. Por la regla de la cadena, la derivada de $h(x)$ es:

$$h'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

Por tanto, $F(u(x))$ es una primitiva de $f(u(x))u'(x)$ y se verifica:

$$\int f(u(x))u'(x)\, dx = F(u(x)) + C$$

expresión que nos inspira el método de integración por cambio de variable. Si una integral se puede escribir de la forma $\int f(u(x))u'(x)\, dx$, la sustitución $t = u(x)$, $dt = u'(x)\, dx$ la transforma en $\int f(t)\, dt$, que puede resultar de más fácil cálculo.

Ejemplos:

- Calculemos $\int \frac{Lx}{x} dx$. Hacemos: $Lx = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$.

$$\int \frac{Lx}{x} dx = \int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}[Lx]^2 + C$$

- La integral $\int e^{2x}\,\text{sen}(e^{2x}+2)\,dx$ la transformamos, mediante el cambio $t = e^{2x}+2 \Rightarrow dt = 2e^{2x}\,dx$, en

$$\int \frac{1}{2}\,\text{sen}t\,dt = \frac{1}{2}\int \text{sen}t\,dt = \frac{-1}{2}\cos t + C = \frac{-1}{2}\cos(e^{2x}+2) + C$$

Observemos que sin más que hacer el cambio $f(x) = t \Rightarrow f'(x)\,dx = dt$, las integrales inmediatas que se dan en **2.1** se transforman en otras más sencillas. Así, por ejemplo:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sen}t + C$$

Ejercicio:

Resolver mediante el método de cambio de variable las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^3+3x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{1+5x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \text{sen}^2x\cos x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(Lx)}{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int (1+\cos x)^3\,\text{sen}x\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\text{sen}^2x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{(x^3+2x-1)^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-4x}}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}\,dx$

j) $\displaystyle\int x^2\,\text{sen}x^3\,dx$

4 INTEGRACIÓN POR PARTES

4.1. Sean $u,\ v\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ derivables en $]a,b[$. Consideremos la función producto $uv\colon]a,b[\to \mathbb{R}$. Esta es derivable y se verifica:

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x) \Rightarrow$$
$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Poniendo $v'(x)\,dx = dv$, $u'(x)\,dx = du$, resulta:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

que es la fórmula de integración por partes.

Este método de integración suele ser útil en los casos donde el integrando se puede poner como el producto de una función por la derivada de otra.

Algunas integrales que se pueden resolver con este método son las siguientes:

a) *Aquellas cuyo integrando son funciones inversas de las trigonométricas:*

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,cos} x\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,cot} x\,dx$$

Ejemplo:

- Para calcular $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$, hacemos:

$$u = \operatorname{arc\,tg} x,\ dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = x$$

$$\int u\,dv = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$$

$$uv = x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$\int v\,du = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} L|1+x^2| + C$$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - L\,|1+x^2| + C$$

b) *Integrales de la forma:*

$$\int x^n \operatorname{sen} x\,dx; \quad \int x^n \cos x\,dx \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Ejemplo:

- Calculemos $\int x^2 \cos x\,dx$

Hacemos la sustitución:

$$x^2 = u,\ \cos x\,dx = dv \Rightarrow 2x\,dx = du,\ \operatorname{sen} x = v$$

Por la fórmula:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\,dx$$

para calcular $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, el cambio es:

$$x = u,\ \operatorname{sen} x\,dx = dv \Rightarrow dx = du,\ -\cos x = v$$

Así:

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Por lo tanto:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2(-x\cos x + \operatorname{sen} x) + C = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$

c) *Integrales de la forma:*

$$\int e^x \cos x\,dx; \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx; \quad \int x^n e^x\,dx$$

Ejemplo:

- Calculemos $\int e^x \cos x\, dx$

Hacemos: $u = e^x$; $dv = \cos x\, dx \Rightarrow du = e^x\, dx$; $v = \operatorname{sen} x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \quad [1]$$

$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ se resuelve haciendo:

$$u = e^x;\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow du = e^x\, dx;\ v = -\cos x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

Sustituyendo esto último en [1]:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx \Rightarrow$$

$$2 \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x \Rightarrow$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

d) *Integrales de la forma:*

$$\int x^n Lx\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

- Calculemos $\int Lx\, dx$:

$$Lx = u;\ dx = dv \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du;\ x = v$$

$$\int Lx\, dx = xLx - \int x \frac{1}{x} dx = xLx - x + C$$

e) *Integrales de la forma:*

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx; \quad \int \cos^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

Ejemplo:

- Calculemos $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

Hacemos: $u = \operatorname{sen} x$; $dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow du = \cos x\, dx$, $v = -\cos x$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx \Rightarrow 2 \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x \Rightarrow$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x \cos x + x) + C$$

Ejercicio:

Calcular por partes las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$ c) $\int \operatorname{arc\,cot} x\, dx$ e) $\int x^2 \cos x\, dx$ g) $\int x^2 Lx\, dx$ i) $\int \cos^2 x\, dx$

b) $\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx$ d) $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$ f) $\int x^3 e^x\, dx$ h) $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$ j) $\int \cos^3 x\, dx$

---

5 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

El objeto de este apartado es el cálculo de primitivas de funciones racionales cuyo denominador sea un polinomio que tiene todas sus raíces reales.

5.1. Consideremos la función racional:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0},\ a_m, b_n \neq 0$$

Supongamos $m < n$ y que $b_n x_n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ tiene todas las raíces reales y distintas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se puede demostrar que en este caso existen los números $A_1 \ldots A_n$ únicos tales que:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Los números $A_1 \ldots A_n$ pueden calcularse sin más que sumar las fracciones del segundo miembro, igualar los numeradores de las dos fracciones polinómicas y a continuación igualar los coeficientes de igual grado. Esto conduce a un sistema de ecuaciones lineales que puede resolverse por cualquiera de los métodos conocidos.

La integral de la función racional $f(x)$ se convierte en una suma de integrales inmediatas:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{A_1}{x - x_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x - x_2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_n}{x - x_n}\,dx =$$
$$= A_1 L|x - x_1| + A_2 L|x - x_2| + \cdots + A_n L|x - x_n| + C$$

Ejemplos:

- Calculemos $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,dx$

  Las raíces del polinomio denominador son: $x_2 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

  Por lo tanto:

  $$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

  Así:

  $$\frac{5x^2 - 19x + 2}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 2} + \frac{A_3}{x - 3} =$$
  $$= \frac{A_1(x + 2)(x - 3) + A_2(x - 1)(x - 3) + A_3(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} =$$
  $$= \frac{A_1(x^2 - x - 6) + A_2(x^2 - 4x + 3) + A_3(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} =$$
  $$= \frac{x^2(A_1 + A_2 + A_3) + x(-A_1 - 4A_2 + A_3) + (-6A_1 + 3A_2 - 2A_3)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$$

Para que los polinomios numeradores sean iguales, los coeficientes de igual grado tienen que coincidir:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 5 \\ -A_1 - 4A_2 + A_3 = -19 \\ -6A_1 + 3A_2 - 2A_3 = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $A_3 = -1$

La integral primitiva nos queda:

$$\int \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{4}{x+2}dx - \int \frac{1}{x-3}dx =$$
$$= 2L|x-1| + 4L|x+2| - L|x-3| + C$$

- Calculemos $\int \frac{x^2+1}{x^3 + x^2 - 2x}dx$

Las raíces de $x^3 + x^2 - 2x$ son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2} = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)\,x - 2A_1}{x(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$
$$x^2 + 1 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)x - 2A_1 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ A_1 + 2A_2 - A_3 = 0 \\ -2A_1 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $A_1 = \frac{-1}{2}$; $A_2 = \frac{3}{3}$; $A_3 = \frac{5}{6}$

Así:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{5}{6}}{x+2}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}L|x| + \frac{2}{3}L|x-1| + \frac{5}{6}L|x+2| + C$$

- $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{A_1}{x-1}dx + \int \frac{A_2}{x+1}dx = A_1L|x-1| + A_2L|x+1| + C$

Calculamos los coeficientes A_1, A_2:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{A_1(x+1) + A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 - A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}L|x-1| - \frac{1}{2}L|x+1| + C$$

- Veamos otra forma de determinar los coeficientes.

  En el ejemplo anterior se tenía:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A_1(x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

  de donde $1=A_1(x+1)+A_2(x-1)$ [1].

  Los coeficientes A_1 y A_2 se pueden hallar dando, sucesivamente, valores x en [1]; así se obtiene un sistema de ecuaciones que nos permite hallar A_1 y A_2. En la práctica se da a x los valores convenientes para que los cálculos sean sencillos, en particular los valores de x, que anulan alguno de los sumandos de [1].

  Para $x=1$ resulta: $1=2A_1$

  de donde $\begin{cases}A_1=\frac{1}{2}\\ A_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

  Para $x=-1$, resulta: $1=-2A_2$.

- Calculemos $\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$

  Como: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, se tiene:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x-3}=\frac{A_1(x-3)+A_2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

  De donde $x+1=A_1(x-3)+A_2(x-2)$.

  Dando a x los valores 3 y 2, resulta:

  Para $x=3$, $4=A_2$
  Para $x=2$, $3=-A_1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}A_2=4\\ A_1=-3\end{cases}$

$$\int\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{-3}{x-2}dx+\int\frac{4}{x-3}dx=-3L/x-2/+4L/x-3/+C$$

5.2. Supongamos ahora que el polinomio denominador de la función racional

$$f(x)=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_o}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_o},\ m<n;\ a_m,\ b_n\neq 0$$

tiene una descomposición en factores de la forma:

$$b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_o=b_n(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\ldots(x-x_k)^{p_k};p_1+p_2+\cdots+p_k=n$$

En este caso diremos que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son raíces múltiples del polinomio denominador de orden $p_1, p_2, \ldots, p_k$, respectivamente.

Se demuestra que $f(x)$ puede escribirse:

$$f(x)=\left[\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{p_1}}{(x-x_1)^{p_1}}\right]+$$
$$+\left[\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_{p_2}}{(x-x_2)^{p_2}}\right]+\cdots+$$
$$+\left[\frac{C_1}{(x-x_k)}+\frac{C_2}{(x-x_k)^2}+\cdots+\frac{C_{p_k}}{(x-x_k)^{p_k}}\right]$$

El método para calcular los coeficientes $A_1, \ldots, A_{p_1}, \ldots, C_1, \ldots, C_{p_k}$ es el mismo que el empleado en los ejemplos anteriores.

Ejemplos:

- Calculemos $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$$

Para calcular A_1, B_1, B_2 procedemos como en los casos anteriores:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2 + B_1x(x-1) + B_2x}{x(x-1)^2} = \frac{A_1(x^2+1-2x) + B_1(x^2-x) + B_2x}{x(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{x^2(A_1+B_1) + x(-2A_1 - B_1 + B_2) + A_1}{x(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -2A_1 - B_1 + B_2 = 0 \\ A_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 1,\ B_1 = -1,\ B_2 = 1$$

Por tanto:
$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= L|x| - L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

- Calculemos $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}\,dx$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x+2)^2 + A_2(x+2)^2 + B_1(x+1)^2(x+2) + B_2(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^3(A_1+B_1) + x^2(5A_1 + A_2 + 4B_1 + B_2) + x(8A_1 + 4A_2 + 5B_1 + 2B_2)}{(x+1)^2(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{(4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2)}{(x+1)^2(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ 5A_1 + A_2 + 4B_1 + B_2 = 1 \\ 8A_1 + 4A_2 + 5B_1 + 2B_2 = 3 \\ 4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 9,\ A_2 = -4,\ B_1 = -9,\ B_2 = -4$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx = \int \frac{9}{x+1}\,dx - \int \frac{4}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{9}{x+2}\,dx - \int \frac{4}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= 9L|x+1| + 4\frac{1}{x+1} - 9L|x+2| + 4\frac{1}{x+2} + C$$

• Calculemos $\int \frac{x+1}{x^3+6x^2+9x}\,dx$

El polinomio denominador se descompone de la forma:

$$x^3+6x^2+9x = x(x^2+6x+9) = x(x+3)^2; \text{ entonces;}$$

$$\frac{x+1}{x(x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B_1x(x+3) + B_2x}{x(x+3)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{x(x+3)^2} = \frac{x^2(A+B_1) + x(6A+3B_1+B_2) + 9A}{x(x+3)^2} \Rightarrow \begin{cases} A + B_1 = 0 \\ 6A + 3B_1 + B_2 = 1 \\ 9A = 1 \end{cases}$$

de donde: $$A = \frac{1}{9};\ B_1 = -\frac{1}{9};\ B_2 = \frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x+1}{x(x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{9}}{x}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{9}}{x+3}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}L|x| - \frac{1}{9}L|x+3| - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x+3} + C$$

5.3. Supongamos ahora que en la función

$$f(x) = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_o}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_o} \quad a_n, b_n \neq 0$$

se tiene $m \geq n$.

Llamemos $p(x)$, $q(x)$, respectivamente, al polinomio numerador y denominador de $f(x)$.

Dividiendo $p(x)$ por $q(x)$ sabemos que existen polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = c(x)q(x) + r(x)$ y además el grado de $r(x)$ es estrictamente menor que el de $q(x)$ o bien es el polinomio cero.

Dividiendo los dos miembros de $p(x) = c(x)q(x) + r(x)$ por $q(x)$, obtenemos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c(x)q(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} \Rightarrow f(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $\frac{r(x)}{q(x)}$ es una *función racional propia.*

Resulta:

$$\int f(x)\,dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

$\int \frac{r(x)}{q(x)}$ es una integral racional de las resueltas en **5.1** y **5.2**.

Ejemplos:

- Calculemos $\int \frac{x^3+2}{x-1}\,dx$

Dividiendo x^3+2 por $x-1$ resulta:

$$x^3+2=(x-1)(x^2+x+1)+3 \Rightarrow \frac{x^3+2}{x-1}=(x^2+x+1)+\frac{3}{x-1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3+2}{x-1}\,dx=\int (x^2+x+1)\,dx+\int \frac{3}{x-1}\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+3L|x-1|+C$$

- Vamos a calcular $\int \frac{x^4-3x^3+4x^2-3x-3}{x^2-2x+1}\,dx$

Dividiendo numerador por denominador obtenemos:

$$x^4-3x^3+4x^2-3x-3=(x^2-2x-1)(x^2-x+1)-4$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3+4x^2-3x-3}{x^2-2x+1}\,dx=\int (x^2-x+1)\,dx-\int \frac{4}{x^2-2x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-4\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$$

Como $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}=\int \frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)}$

$$\int \frac{x^4-3x^3+4x^2-3x-3}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{x-1}+C$$

5.4. Supongamos $f(x)=\dfrac{a_m x^m+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}$ y que $m<n$ (pues el caso $m\geq n$) se reduce a éste, como ya hemos visto, sin más que dividir los polinomios.

Si la descomposición del polinomio denominador es de la forma:

$b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\ldots(x-x_i)^{r_i}(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_jx+q_j)$, donde los trinomios no tienen raíces reales, entonces puede demostrarse que $f(x)$ se descompone en la forma:

$$f(x)=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+$$

$$+\frac{B_{r_2}}{(x-x_1)^{r_2}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x+p_2x+q_2}+\cdots+\frac{M_jx+N_j}{x+p_jx+q_j}$$

En este caso la única variación que se presenta respecto de los anteriores es el cálculo de integrales de la forma

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Completando el cuadrado del denominador tenemos:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{Mx + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\,dx}\,dx$$

Haciendo $u = x + \frac{p}{2}$ y $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$ (que debe ser positivo), resulta:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{Mu + N'}{u^2 + a^2}\,du, \text{ donde } N' = N - M\frac{p}{2}$$

resulta:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{Mu}{u^2 + a^2}\,du + \int \frac{N'du}{u^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} L/u^2 + a^2/ + \int \frac{N'}{a^2\left[\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1\right]}\,du = \frac{M}{2} L/u^2 + a^2/ + \frac{N'}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a}$$

donde para calcular esta última integral se ha hecho la sustitución $z = \frac{u}{a}$.

Ejemplo:

- Calcular $\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)}$

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Mx + N)x}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{(A + M)x^2 + (A + N)x + A}{x(x^2 + x + 1)}$$

Entonces: $\left.\begin{array}{r} A + M = 0 \\ A + N = 0 \\ A = 1 \end{array}\right\}$ de donde $A = 1,\ M = -1,\ N = -1$

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-x - 1}{x^2 + x + 1}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx$$

Para calcular esta última podemos aplicar la fórmula obtenida o bien proceder siguiendo los pasos dados para calcularla:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx = \int \frac{x + 1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \left(\text{haciendo } u = x + \frac{1}{2}\right) = \int \frac{u + \frac{1}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}}\,du =$$

$$= \int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} L/u^2 + \frac{3}{4}/ + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}u^2 + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} L/u^2 + \frac{3}{4}/ + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)^2 + 1\right]}$$

Haciendo en la última integral el cambio $\frac{2}{\sqrt{3}}u = z$, resulta:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}L/u^2 + \frac{3}{4}/ + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}u =$$

$$= \frac{1}{2}L/x^2 + x + 1/ + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Luego $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = L/x/ - \frac{1}{2}L/x^2 + x + 1/ - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + C$

Ejercicio:

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+4x-5}$

b) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+3e^x+2}$

c) $\int \frac{(x+5)\,dx}{(x+1)^3(x+2)(x+3)}$

d) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+1}$

e) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

f) $\int \frac{\operatorname{sen}x\,dx}{\cos^3 x + \cos^2 x + 2\cos x}$

g) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

h) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

i) $\int \frac{(3x^2+1)\,dx}{(x^2-1)^3}$

j) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$

6 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

6.1. En este epígrafe veremos que la integral de una función trigonométrica donde sen$x$ y cos$x$ aparezcan ligadas por operaciones algebraicas (sumas, productos y cocientes) de funciones algebraicas puede transformarse en una racional mediante un cambio de variable.

Este consiste en hacer:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg}t \Rightarrow dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$$

Así:

$$\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos^2 \frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

De forma análoga:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Ejemplos:

- La integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + 2\cos x}$ se transforma, por el cambio anterior, en

$$\frac{2\frac{dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} + 2\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t + 1 - t^2} = -\int \frac{dt}{t^2 - t - 1} = -\int \frac{dt}{\left(t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}$$

que es una integral racional del tipo de las resueltas anteriormente.

- Calculemos $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{1 + \frac{2t}{1 + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = 2\int \frac{dt}{1 + 2t - 1 + t^2 + t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2 + 2t} = \int \frac{dt}{t(t + 1)}$$

Esta última es una integral cuyo denominador tiene raíces simples, que sabemos resolver.

La sustitución $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ presenta el inconveniente de que con frecuencia las integrales resultantes suelen ser de cálculo muy laborioso. Con frecuencia es mejor utilizar alguna propiedad conocida de las funciones trigonométricas, como indican los siguientes

Ejemplos:

- Calcular $\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$

  Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$; entonces:

  $$\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx = \int \sqrt{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \int \sqrt{2}\cos x\, dx = \sqrt{2}\operatorname{sen} x + C$$

- Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

  Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Luego:

  $$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right] + C$$

6.2. *Integrales de la forma* $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ *ó* $\int \cos^n x\,dx$, *donde n es impar.*

Como n es impar, $n = 2k + 1$; entonces $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \operatorname{sen} x\,dx =$
$= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x\,dx$

Haciendo el cambio $\cos x = u$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, resulta:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\int (1 - u^2)^k\,du$$

Pero desarrollando por el binomio de Newton $(1 - u^2)^k$ la integral es inmediata.

Ejemplo:

- Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= -\int (1 - u^2)\,du = -\left[\int du - \int u^2\,du\right] = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

El mismo método es válido para las potencias impares del coseno.

Ejemplo:

- Calcular $\int \cos^5 x\,dx$

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx$$

Haciendo $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1 - u^2)^2\,du = \int (1 - 2u^2 + u^4)\,du =$$

$$= \int du - 2\int u^2\,du + \int u^4\,du = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

6.3. *Integrales de la forma* $\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\,dx$ *con n arbitrario.*

Haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} ax$, $du = a \cos ax\,dx$, entonces:

$$\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int u^n\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \\ \dfrac{1}{a} L|u| + C \text{ si } n = -1 \end{cases}$$

Es decir, $\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\dfrac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \\ \dfrac{1}{a} L|\operatorname{sen} ax| + C \text{ si } n = -1 \end{cases}$

Ejemplo:

- Calcular $\int \operatorname{sen}^4 ax \cos ax\,dx$.

Haciendo $u = \operatorname{sen} ax$, $du = a \cos ax\,dx$, entonces:

$$\int \operatorname{sen}^4 ax \cos ax\,dx = \int u^4 \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5a}\operatorname{sen}^5 ax + C.$$

El mismo método es válido para las integrales de la forma

$\int \cos^n ax \ \text{sen} ax \, dx$; en este caso, la sustitución es $u = \cos ax$, $du = -a \ \text{sen} ax \, dx$

$$\int \cos^n ax \ \text{sen} ax \, dx = -\frac{1}{a}\int u^n \, du = \begin{cases} -\frac{1}{a}\,\frac{u^{n+1}}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ -\frac{1}{a} L|u| & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

es decir:

$$\int \cos^n ax \ \text{sen} ax \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{a}\,\frac{\cos^{n+1} ax}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ -\frac{1}{a} L|\cos ax| & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Ejercicios:

1. Calcular las siguientes integrales trigonométricas:
   a) $\int \frac{dx}{3 - 2\cos x}$
   b) $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$
   c) $\int \frac{dx}{\cos x}$
   d) $\int \text{cosec} x \, dx$

2. Calcular:
   a) $\int \text{sen}^3 \frac{5}{2} x \cos \frac{5}{2} x \, dx$
   b) $\int \text{sen}^5 x \, dx$
   c) $\int \cos^3 x \, dx$
   d) $\int \sqrt{1 + \text{sen} 2x} \, dx$
   e) $\int \sec^6 x \, dx$

   (Indicación: $\int \sec^6 x \, dx = \int \sec^4 x \ \sec^2 x \, dx$; tener en cuenta que $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$ y hacer la sustitución $\text{tg} x = u$.)

   ¿Es este método válido para calcular $\int \sec^{2n} x \, dx$?
   f) $\int \cos^4 x \, dx$

   (Indicación: $\int \cos^4 x \, dx = \int \cos^2 x \cos^2 x \, dx$; tener en cuenta que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.)
   g) $\int \text{sen}^6 x \, dx$ (Indicación: proceder de forma análoga al ejercicio anterior.)

7 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

En este apartado trataremos de resolver cierto tipo de integrales irracionales. Concretamente aquellas cuyo integrando tenga un único factor irracional de alguna de las siguientes formas:

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2},\ \sqrt{a^2 + b^2x^2},\ \sqrt{a^2x^2 - b^2}$$

En éstas efectuaremos ciertos tipos de cambio de variable que las transformará en integrales trigonométricas.

7.1. Supongamos que el integrando tiene un factor de la forma $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$. Efectuamos el cambio:

$$x = \frac{a}{b}\operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \frac{a}{b}\cos t\, dt$$

El factor irracional se transforma:

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = \sqrt{a^2 - b^2\frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}^2 t} = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = a\cos t$$

Ejemplo:

- Calculemos $\int\sqrt{5 - x^2}\, dx$

  Hacemos: $x = \sqrt{5}\operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \sqrt{5}\cos t\, dt$

  $$\int\sqrt{5 - x^2}\, dx = \int\sqrt{5 - 5\operatorname{sen}^2 t}\,\sqrt{5}\cos t\, dt = 5\int\cos^2 t\, dt:$$

  $$5\int\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt = \frac{5}{2}\left[\int dt + \int\cos 2t\, dt\right] = \frac{5}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right] + C$$

  Como $x = \sqrt{5}\operatorname{sen} t \Rightarrow t = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{\sqrt{5}}$

  Nos queda:

  $$\int\sqrt{5 - x^2}\, dx = \frac{5}{2}[t + \operatorname{sen} t\cos t] + C = \frac{5}{2}[t + \operatorname{sen} t\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}] + C =$$

  $$= \frac{5}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}\right] + C$$

7.2. Si en el integrando aparece el factor irracional $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, se hace:

$$x = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos^2 t}\, dt$$

Así:

$$\sqrt{a^2 + b^2x^2} = \sqrt{a^2 + b^2\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a\frac{1}{\cos t}$$

Ejemplo:

- $\dfrac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ con el cambio $x = 2\,\mathrm{tg}t \Rightarrow dx = 2\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ se transforma:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{4\,\mathrm{tg}^2 t\sqrt{4+4\,\mathrm{tg}^2 t}} = \int \frac{2\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{4\,\mathrm{tg}^2 t\dfrac{2}{\cos t}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\mathrm{tg}^2 t\cos t} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\dfrac{\mathrm{sen}^2 t}{\cos^2 t}\cdot \cos t} = \frac{1}{4}\int (\mathrm{sen}t)^{-2}\cos t\,dt = -\frac{1}{4}(\mathrm{sen}t)^{-1} = -\frac{1}{4\,\mathrm{sen}t} + C$$

Como $\dfrac{1}{\mathrm{sen}t} = \sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 t} = \sqrt{1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 t}} = \sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$, resulta:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

7.3. Consideremos, por último, el caso donde el factor irracional del integrando sea $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$. Se efectúa el cambio:

$$x = \frac{a}{b}\sec t \Rightarrow dx = \frac{a}{b}\frac{\mathrm{sen}t}{\cos^2 t}dt$$

Por tanto:

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2} = \sqrt{b^2\frac{a^2}{b^2}\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\,\mathrm{tg}t$$

Ejemplo:

- Calculemos $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Hacemos: $x = \sec t \Rightarrow dx = \dfrac{\mathrm{sen}t}{\cos^2 t}dt$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2 t - 1}}{\sec t}\frac{\mathrm{sen}t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\mathrm{tg}t}{\sec t}\frac{\mathrm{sen}t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int \mathrm{tg}^2 t\,dt = \int\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = \mathrm{tg}t - t + C$$

Como $\mathrm{tg}t = \sqrt{1+\sec^2 t} = \sqrt{1+x^2}$, la integral primitiva nos queda:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{1+x^2} - \mathrm{arc\,sec}x + C$$

Ejercicio:

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int \sqrt{1+2x^2}\,dx$

c) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

d) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3x^2}}$

f) $\int \frac{\sqrt{5-x^2}}{x}\,dx$

8 ECUACIONES DIFERENCIALES

8.1. Dada la ecuación $y' = f(x)$, sabemos calcular el valor de y, ya que:

$$y = \int f(x)\,dx$$

Diremos que $\int f(x)\,dx$ *es solución de la ecuación diferencial* $y' = f(x)$. ¿Por qué la llamamos ecuación diferencial? Observemos que la función incógnita y aparece bajo el signo de derivación.

Generalizando, *una ecuación diferencial es una ecuación que engloba derivadas de cualquier orden y elevadas a distintas potencias*. Una solución de la ecuación diferencial es una función $e(x)$, que sustituida en lugar de la incógnita y, satisfaga la ecuación.

Ejemplos:

- $y' - \text{sen}x + \cos x = 0$ es una ecuación diferencial. La solución se obtiene:

$$y' = \text{sen}x - \cos x \Rightarrow y = \int(\text{sen}x - \cos x)\,dx = -\cos x - \text{sen}x + C$$

Para cada valor que tome C obtenemos una solución particular. Así:

$$e(x) = -\cos x - \text{sen}x + 2$$

es una solución particular. Observemos que se verifica:

$$e'(x) - \text{sen}x + \cos x = 0$$

La ecuación $y' - \text{sen}x + \cos x = 0$ se dice de *primer orden* (porque sólo aparecen derivadas de primer orden) y *primer grado* (dado que la derivada de mayor orden que aparece está elevada a la primera potencia).

- La ecuación diferencial $3(y')^2 - 2x^3 = 0$ es de primer orden y de segundo grado. Intentemos buscar alguna solución.

  Despejando y':

$$(y')^2 = \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x^{3/2} \Rightarrow y = \pm\int\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x^{3/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

  Soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

$$y = -\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

  Lo mismo que en el ejemplo anterior, para cada valor de C obtenemos distintas soluciones particulares.

8.2. El estudio de las ecuaciones diferenciales es el objeto de un amplio capítulo del análisis matemático que forma parte de la matemática superior. Como introducción muy elemental a éste, resolveremos un tipo muy sencillo de ecuación diferencial de primer orden y primer grado llamada de *variables separadas*. Esta es de la forma:

$$y'f(y) + g(x) = 0$$

donde $f(y)$, $g(x)$ son funciones, respectivamente, de y y de x. La solución se obtiene integrando la expresión:

$$y'f(y) + g(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}f(y) + g(x) = 0 \Rightarrow f(y)\,dy + g(x)\,dx = 0$$

Su solución es, por tanto:

$$\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = 0$$

Ejemplos:

- La ecuación $y' + \dfrac{y^2}{x+1} = 0$, $x \neq -1$ es de variables separadas. La podemos escribir, dividiendo por $y^2 (y \neq 0)$:

$$\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{x+1} = 0$$

  O bien:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{x+1} = 0 \quad [1]$$

  Observemos que al dividir por y^2 suponemos $y \neq 0$. La función $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, ya que:

$$(0)' + \frac{0^2}{x+1} = 0$$

La otra solución la obtenemos integrando en [1]:

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dx}{x+1} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{y} + L|x+1| + C = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} = L|x+1|\ C \Rightarrow y = \frac{1}{L|x+1| + C}$$

La constante C aparece debido a las integrales efectuadas. Para cada valor de C aparece una solución particular.

- Resolvamos la ecuación $(y^2+1)e^x y' + 2 = 0$, que también es de variables separadas, pues se escribe:

$$(y^2+1)y' + 2e^{-x} = 0$$

O bien:

$$(y^2+1)\,dy + 2e^{-x}\,dx = 0$$

Integrando:

$$\int (y^2+1)\,dy + 2\int e^{-x}\,dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 + y - 2e^{-x} + C = 0$$

En este caso resulta difícil despejar y. Se dice que la solución queda *definida implícitamente* por

$$\frac{1}{3}y^3 + y - 2e^{-x} + C = 0$$

- Resolvamos $\dfrac{3y^3 - \operatorname{sen} y}{\cos x}\,dy + \operatorname{sen} x\,dx = 0$

La podemos escribir:

$$(3y^3 - \operatorname{sen} y)\,dy + \cos x \operatorname{sen} x\,dx = 0 \Rightarrow \int (3y^3 - \operatorname{sen} y)\,dy + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$3\frac{y^4}{4} + \cos y + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}y^4 + \cos y - \frac{1}{4}\cos 2x + C = 0$$

La solución está definida implícitamente por la ecuación:

$$3y^4 + 4\cos y - \cos 2x + C = 0$$

Observemos que si se deriva ésta implícitamente obtenemos de nuevo la ecuación diferencial.

EJERCICIOS FINALES

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x^3 \cos x \, dx$

b) $\int x \operatorname{arc\,tg} x^2 \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{xe^x \, dx}{(1+x)^2}$

d) $\int x^3 Lx \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}$

f) $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{(x-2)(x^2-9)}$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+1} dx$

h) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{(x-2)^2}$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+8} dx$

k) $\displaystyle\int \frac{e^x \, dx}{e^{2x}-3e^x}$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\cos x}$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$

o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx$

p) $\int \sqrt{x^2+4} \, dx$

q) $\displaystyle\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2-16}}$

r) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = \dfrac{1-y^2}{1+x^2}$

b) $e^x - \operatorname{sen} y y' + 2e^{-x} dx = 0$

c) $x^2(y^3-1)\,dy + (x^2-x+1)\,dx = 0$

d) $\dfrac{Ly}{x} dy + dx = 0$

e) $\operatorname{arc\,tg} y \, dy + \operatorname{arc\,sen} x \, dx = 0$

f) $5y' + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg} y = 0$

g) $e^{-\operatorname{sen} x} dy + \cos x \, dx = 0$

h) $\sqrt{1-x^2}\ y' = 5$

i) $e^{y-x}\ y' + x = 3$

TEMA 20 EL CONCEPTO DE INTEGRAL

En este tema se comienza el estudio de la integral definida. El problema geométrico de la determinación del área de ciertas superficies planas es el origen y la base del cálculo integral.

Históricamente el cálculo del área determinada por un segmento parabólico condujo a Arquímedes al llamado método exhaustivo, consistente en aproximar sucesivamente «por exceso y por defecto» la superficie cuya área se desea determinar mediante regiones rectangulares. En este proceso se encuentra el germen de lo que mil ochocientos años después desarrollarían Leibniz y Fermat.

En el tema se procede de dicha forma, definiendo previamente el concepto de integral para una función escalonada y después para una función continua (mediante sucesivas aproximaciones a dicha función por funciones escalonadas).

Con este motivo se recuerdan muy brevemente las propiedades de las funciones escalonadas, ya estudiadas de forma exhaustiva en 3.º de BUP.

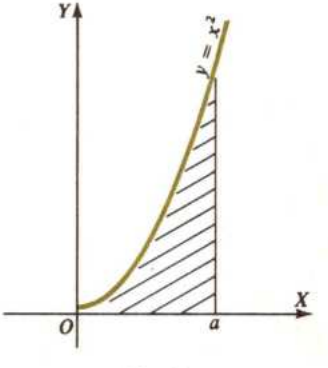
A continuación se define la integral para las funciones continuas y se estudian sus propiedades.

Finalmente se da la definición de integral de Rieman para una función acotada no necesariamente continua, lo cual supone una extensión del concepto de integral. También se estudian muy brevemente las integrales impropias de primera especie (límites de integración infinitos) y de segunda especie (existencia de puntos en los que la función no está acotada).

1 EL PROBLEMA DEL ÁREA COMO ORIGEN DEL CÁLCULO INTEGRAL

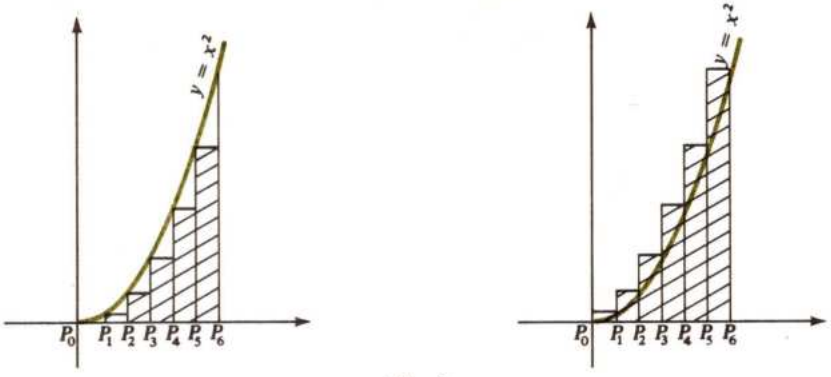
1.1. En una carta a Dositeo, Arquímedes (científico griego que vivió entre los años 287 y 212 antes de Cristo) expone un método para calcular el área determinada por un segmento de parábola. El método seguido por Arquímedes contiene los fundamentos básicos de lo que hoy conocemos como cálculo integral.

Vamos a dar unas ideas del método seguido por Arquímedes, que se conoce como *método exhaustivo*. Supongamos que queremos calcular el área determinada por el segmento de parábola que se indica en la figura 1.



(Fig. 1)

Si dividimos el segmento $[o, a]$ en un cierto número de partes (que podemos tomar iguales para simplificar los cálculos), tenemos una serie de puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ que determinan dos familias de rectángulos, como se indica en la figura 2.



(Fig. 2)

Si llamamos S al área que buscamos y S'_n y S''_n a la suma de las áreas de los rectángulos interiores y exteriores, respectivamente, es obvio que se verifica:

$$S'_n < S < S''_n$$

para cualquier subdivisión del intervalo $[o, a]$.

Ahora bien, S'_n y S''_n son fácilmente calculables; en efecto, si dividimos $[o, a]$ en n partes iguales, la longitud de la base de cada rectángulo es $\frac{a}{n}$; entonces:

$$S'_n = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{a}{n}\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2 = \frac{a^3}{n^3}(1 + 2^2 + (n-1)^2)$$

$$S''_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{a}{n}\left(\frac{na}{n}\right)^2 = \frac{a^3}{n^3}(1 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

Por inducción se puede demostrar que:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \quad [1]$$

Luego: $S'_n < \frac{a^3}{3} < S''_n$ para todo n.

Utilizando el carácter arquimidiano de los números reales y la desigualdad [1], se puede probar que el único número que verifica estas condiciones es $\frac{a^3}{3}$; por tanto, $S = \frac{a^3}{3}$.

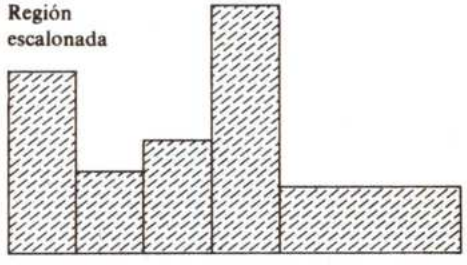
El método expuesto fue sometido a una revisión crítica casi dos mil años después de que Arquímedes lo diera a conocer. Es evidente que Arquímedes utiliza en sus razonamientos una serie de propiedades que, si bien son muy intuitivas, no pueden aceptarse desde un punto de vista formal si no se da una definición rigurosa del concepto de área.

Por ejemplo, Arquímedes utiliza la propiedad del área de que si un recinto es interior a otro, el área del primero no puede ser mayor que la del segundo; también utiliza el hecho de que el área de una región que se descompone en dos o más partes es la suma de las áreas de cada una de las partes; el mismo hecho de suponer que una determinada región tiene área es una cuestión que depende de la definición que se establezca de área.

El trabajo de Arquímedes, hoy en día, se considera importante, más que por calcular el área de ciertas regiones, por sugerir un camino que conduce a una definición del concepto de área y de integral.

1.2. Las anteriores observaciones nos llevan a tratar de establecer una definición rigurosa de área.

Una región del plano es un conjunto de puntos de plano; si es unión de rectángulos, se dice una *región escalonada* (Fig. 3).



(Fig. 3)

Definimos *área de un rectángulo* como el producto de sus dimensiones, y *área de una región escalonada* como la suma de las áreas de los rectángulos que la forman.

Una familia $\mathcal{F}$ de regiones del plano se dice *medible* si verifica las siguientes condiciones:

1.ª Todo rectángulo está en $\mathcal{F}$.

2.ª Si F_1 y $F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ y $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

3.ª Si F_1 y F_2 son congruentes, entonces $F_1 \in \mathcal{F}$ si y sólo si $F_2 \in \mathcal{F}$.

4.ª Si S es un subconjunto del plano tal que existen regiones escalonadas A y B y un único número s, tales que:

a) $A \subset S \subset B$.

b) Para todo par de regiones escalonadas A', B' con $A' \subset S \subset B'$ se verifica: área de $A' \leq s \leq$ área de B', entonces $S \in \mathcal{F}$.

Obsérvese que de la primera y segunda condiciones se deduce que toda región escalonada pertenece a $\mathcal{F}$.

Si $F \in \mathcal{F}$, F se dice *medible*.

Si $\mathcal{F}$ es una familia medible, una *función área* (relativa a $\mathcal{F}$) es una aplicación $\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que verifica:

A_1) $\forall F \in \mathcal{F}$, $\mu(F) \geq 0$.

A_2) Si F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ y $F_1 \subset F_2$, entonces $\mu(F_1) \leq \mu(F_2)$.

A_3) Si F_1 y $F_2 \in \mathcal{F}$, $\mu(F_1 \cup F_2) + \mu(F_1 \cap F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$.

A_4) Si $F_1 \in \mathcal{F}$ y F_2 es congruente en F_1, entonces $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

A_5) Si R es una región rectangular, $\mu(R) =$ área de R.

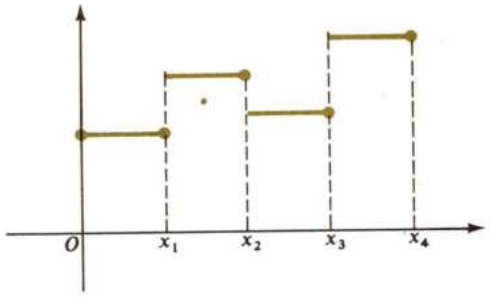
A_6) Si S es una región que verifica la condición cuarta de conjuntos medibles, entonces $\mu(S) = s$.

$\mu(F)$ se dice el *área de* F.

Se puede demostrar, aunque nosotros no lo haremos, que existe una y solamente una función área, que resulta ser precisamente la que estamos acostumbrados a usar.

2 FUNCIONES ESCALONADAS

2.1. El método exhaustivo de Arquímedes, así como la condición cuarta de conjuntos medibles, nos conduce a estudiar funciones cuya representación gráfica es de la forma de la figura 4, que son precisamente las que limitan las regiones escalonadas; estas funciones se denominan *escalonadas*.



(Fig. 4)

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real $a < b$.

Un conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de números reales se dice una *partición* de $[a, b]$ si verifica la condición:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Se llama *norma* de P, y se representa por $|P|$, al número:

$$|P| = \text{máx}\{(x_1 - x_0),\ (x_2 - x_1),\ \ldots,\ (x_n - x_{n-1})\}$$

Dadas dos particiones $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $P' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$ se dice que P *es más fina que* P' si $P' \subset P$.

Dadas las particiones $P' = \{x'_0, \ldots, x'_p\}$ y $P'' = \{x''_0, \ldots, x''_q\}$ siempre es posible encontrar otra más fina que ambas. Basta tomar $P = P' \cup P''$. Se tiene que $P' \subset P$, $P'' \subset P$.

Obsérvese que si $P' \subset P$ se tiene $|P| \leq |P'|$.

2.2. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. *Una función* $E: [a, b] \to \mathbb{R}$ *se dice escalonada si es constante en cada subintervalo* $]x_{i-1}, x_i]$ *determinado por* P.

Es decir:

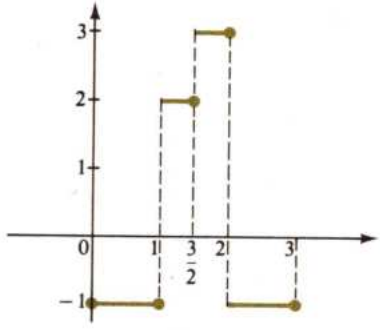
$$F(x) = \begin{cases} e_1 \text{ si } a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ e_2 \text{ si } x_1 < x \leq x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_i \text{ si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n \text{ si } x_{n-1} < x \leq x_n = b \end{cases} \qquad e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}$$

Una función escalonada es continua en $]a, b[$ salvo en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. En $x_0 = a$ es continua por la derecha y en $x_n = b$, continua por la izquierda.

Ejemplo:

- La función $E = [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 3 & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



(Fig. 5)

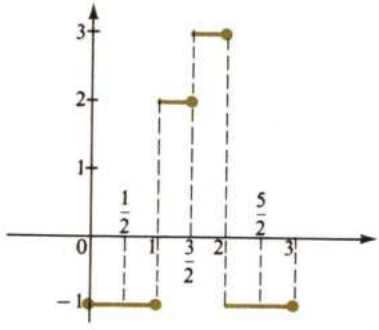
es escalonada. Su gráfica está representada por la figura 5.

Observemos que presenta discontinuidad de salto en los puntos $1, \frac{3}{2}, 2$.

Esta misma función podría definirse mediante una partición más fina que $P = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$

Tomando $P' = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ la función E': $[0, 3] \to \mathbb{R}$ definida

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 3 & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x \leq \frac{5}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{5}{2} < x \leq 3 \end{cases}$$



(Fig. 6)

coincide con E'. En la figura 6 se observa el proceso seguido.

2.3. *Sean* E', E'': $[a, b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones escalonadas. La función suma*

$$E' + E''\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

es también escalonada.

Observación: Si E', E'': $[a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones escalonadas definidas mediante particiones P', P'', respectivamente, para sumarlas definimos E', E'' mediante la partición más fina que ambas $P = P' \cup P''$, dado que la definición de una función escalonada *no* depende de la partición empleada, como se puso de manifiesto en un ejemplo anterior.

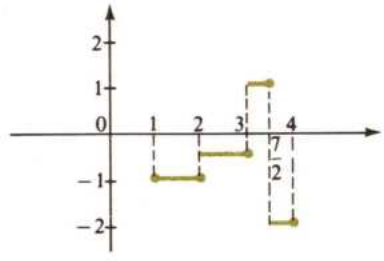
2.4. *Si* $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función escalonada y* $c \in \mathbb{R}$, *la función* $cE\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *es también escalonada.*

2.5. *Si* $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función escalonada, la función* $|E|\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida por* $|E|(x) = |E(x)|$ *es una función escalonada, llamada valor absoluto de* E.

Ejemplo:

- Sea la función escalonada $E\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$ definida por:

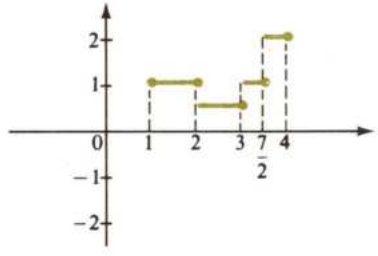
$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 < x \leq \dfrac{7}{2} \\ -2 & \text{si} \quad \dfrac{7}{2} < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{(Fig. 7)}$$



(Fig. 7)

Su valor absoluto es:

$$|E|(x) = |E(x)| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 < x \leq \dfrac{7}{2} \\ 2 & \text{si} \quad \dfrac{7}{2} < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{(Fig. 8)}$$



(Fig. 8)

Ejercicios:

1. Definir una partición P en el intervalo $[-1, 2]$ que verifica la propiedad indicada en cada caso:
   a) $|P| = 1$
   b) $|P| < 1$
   c) $|P| \geq \dfrac{1}{2}$
   d) $\dfrac{1}{3} < |P| < \dfrac{1}{2}$
   e) $P' \subset P$, siendo $P' = \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2\right\}$ y $P \neq P'$
2. Demostrar que si $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada, $cE\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es escalonada, $\forall c \in \mathbb{R}$.
3. Demostrar que si $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada, $|E|\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es escalonada.

4. Dadas las funciones escalonadas:

$$E'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 3 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2} \\ 4 & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x \leq 3 \end{cases}$$

$$E''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Se pide:

a) Representar gráficamente E' y E''.
b) Calcular $E' + E''$.
c) Calcular $2E' - \frac{1}{3}E''$.
d) Comprobar $|E' + E''| \leq |E'| + |E''|$.
e) Dibujar las gráficas de $|E'|$ y $|E''|$.

3 INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN ESCALONADA: ÁREA DE RECINTOS LIMITADOS POR FUNCIONES ESCALONADAS

3.1. Sea E: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

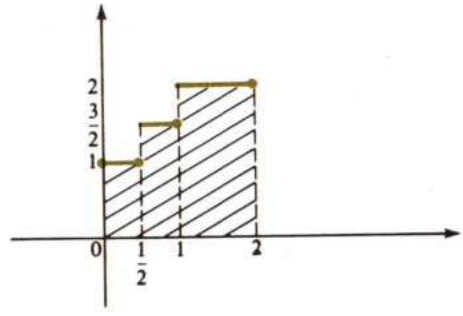
Al número $\sum_{i=1}^{n} e_i(x_i - x_{i-1})$ *lo llamaremos integral de* E *en* $[a, b]$ y lo representaremos $\int_a^b E$ Así: $\int_a^b E = \sum_{i-1}^{n} e_i(x_i - x_{i-1})$.

Observemos que si $E(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, $\int_a^b E$ mide el área del recinto que determina la función escalonada con OX entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Esto coincide precisamente con la definición de área de una región escalonada dada en el apartado 1.

Ejemplo:

• Consideremos la función escalonada $E\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{(Fig. 9)}$$



(Fig. 9)

$$\int_0^2 E = 1\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2(2 - 1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 2 = \frac{2 + 3 + 8}{4} = \frac{13}{4}$$

$\int_0^2 E$ mide el área del recinto determinado por E con OX entre las abscisas $x = 0$, $x = 2$ (Figura 9).

3.2. Si $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada, el valor de $\int_a^b E$ es independiente de la partición $[a, b]$ que utilicemos para definir E.

En efecto. Supongamos:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ e_i & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

y $d \in [a, b]$ tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < d < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

Según esta nueva partición, la función $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se define así:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_i & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leq d \\ e_i & \text{si} \quad d < x \leq x_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

Se tiene:

$$\int_a^b E = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \cdots + e_i(d - x_{i-1}) + e_i(x_i - d) + \cdots +$$
$$+e_n(x_n - x_{n-1}) = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \cdots +$$
$$+e_i d - e_i x_{i-1} + e_i x_i - e_i d + \cdots +$$
$$+e_n(x_n - x_{n-1}) = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \cdots +$$
$$+ e_i(x_i - x_{i-1}) + \cdots + e_n(x_n - x_{n-1})$$

El último resultado es el valor de $\int_n^b E$ según la primera partición de E.

3.3. Si E' y E'' son funciones escalonadas y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$\text{a)} \quad \int_a^b (E' + E'') = \int_a^b E' + \int_a^b E'' \; ; \qquad \text{b)} \quad \int_a^b (cE) = c\int_a^b E$$

propiedades que son de demostración inmediata.

3.4. Sea E: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada. Se verifica:

$$\int_a^b E \leq \int_a^b |E|$$

La demostración de esta proposición es también inmediata.

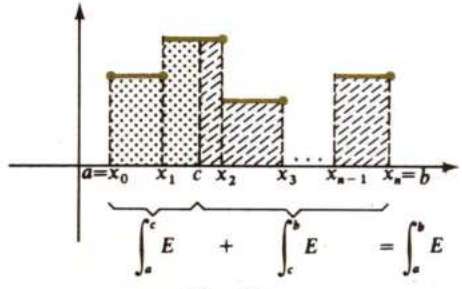
3.5. Sea E: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada. Si $c \in]a, b[$ se verifica:

$$\int_a^b E = \int_a^c E + \int_c^b E$$

Esta propiedad de la integral de funciones escalonadas tiene una interpretación geométrica clara si $E(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Sabemos que $\int_a^b E$ es el área que determinan la gráfica de E, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$.

Si dividimos este recinto por la recta $x = c$, el área de la izquierda tiene por valor $\int_a^c E$ y el de la derecha $\int_c^b E$ (Fig. 10).



(Fig. 10)

Demostración

Sea la función escalonada $E\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

Si $c \in [a, b]$, estará en alguno de los intervalos $[x_0, x_1]$, $]x_1, x_2]$, $]x_2, x_3]$, $\ldots$, $]x_{n-1}, x_n]$ determinados por $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Supongamos $c \in]x_{i-1}, x_i]$. Este punto, junto con P, determina las particiones $P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c\}$ de $[a, c]$ y $P'' = \{c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ de $[c, b]$.

Como $E(x) = e_i$ si $x \in]x_{i-1}, x_i]$ resulta que $E(x) = e_i$ si $x \in]x_{i-1}, c]$ o $x \in]c, x_i]$.

Por tanto: $$\int_a^c E = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \cdots + e_i(c - x_{i-1})$$

$$\int_c^b E = e_i(x_i - c) + e_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + e_n(x_n - x_{n-1})$$

Sumando:

$$\int_a^c E + \int_c^b E = [e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \cdots + e_i(c - x_{i-1})] +$$
$$[e_i(x_i - c) + e_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + e_n(x_n - x_{n-1})] =$$
$$= e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \cdots + e_i(x_i - x_{i-1}) + \cdots + e_n(x_n - x_{n-1}) = \int_a^b E$$

Ejercicios:

1. Demostrar las propiedades a) y b) de **3.3.**
2. Demostrar la propiedad **3.4.**
3. Demostrar que si E, $E'\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ son escalonadas y $E(x) \leq E'(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b E \leq \int_a^b E'$.
4. Calcular el área determinada por la función escalonada:

$$E(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 2$.

---

4 INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN CONTINUA EN UN INTERVALO CERRADO

El problema de la integral de una función real de variable real está ligado al del cálculo de áreas de recintos planos cuyos bordes no estén constituidos por segmentos, sino por líneas más generales, como es el caso de los limitados por gráficas de funciones continuas.

El procedimiento que seguiremos para calcular el área de estos recintos es «aproximarlos» por otros cuya área sea de más fácil cálculo, como en el método exhaustivo de Arquímedes.

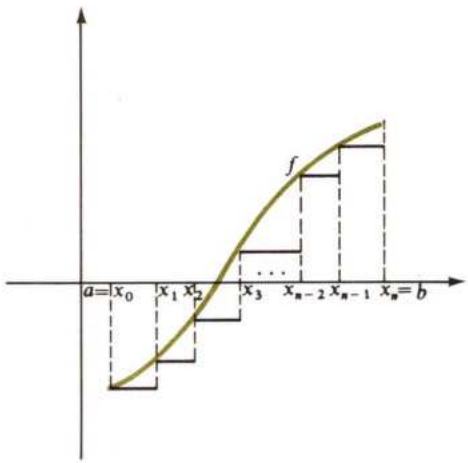
4.1. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

Consideremos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$.

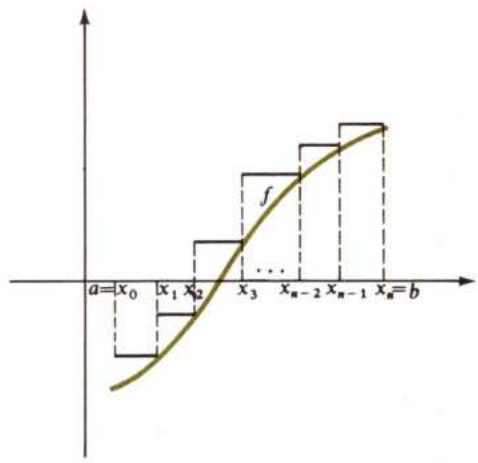
Llamaremos M_1, m_1, respectivamente, al mayor y menor valor que toma f en $[x_0, x_1]$; M_2, m_2 al mayor y menor valor que toma f en $[x_1, x_2]$, y, en general, M_i, m_i el máximo y mínimo en $[x_{i-1}, x_i]$. Observemos que la existencia de los números M_i, m_i en $[x_{i-1}, x_i]$ está garantizada $\forall i = i, \ldots, n$, dado que f es continua en $[x_{i-1}, x_i]$, intervalo cerrado y acotado.

Definimos dos funciones escalonadas E, e: $[a, b] \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$e(x) = \begin{cases} m_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ m_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n = b \end{cases} \qquad \text{(Fig. 11)}$$



(Fig. 11)



(Fig. 12)

$$E(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ M_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n = b \end{cases} \qquad \text{(Fig. 12)}$$

4.2. Sean P y P' dos particiones de $[a, b]$, $P \subset P'$. Sean E, e: $[a, b] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas definidas en **4.1** correspondientes a P y E', e': $[a, b] \to \mathbb{R}$ las correspondientes a P'. Se verifica:

4.2.a. $\int_a^b E \geq \int_a^b E'$

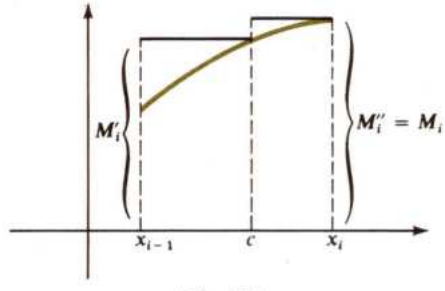
4.2.b. $\int_a^b e \leq \int_a^b e'$

Demostraremos **4.2.a** para el caso de que P' tenga un punto más que P, siendo inmediato deducir de aquí el caso general.

Supongamos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_i, \ldots, x_n\}$ particiones de $[a, b]$:

$$E(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ M_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_i & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases} \qquad E'(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ M_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_i' & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leq c \\ M_i'' & \text{si} \quad c < x \leq x_i \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

Observemos que $M_i' \leq M_i$, $M_i'' \leq M_i$ (Fig. 13).



(Fig. 13)

Por tanto:

$$\int_a^b E' = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_i'(c - x_{i-1}) + \\ + M_i''(x_i - c) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) \leq \\ \leq M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_i(c - x_{i-1}) + M_i(x_i - c) + \\ + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) = M_1(x_1 - x_0) + \\ + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_i(x_i - x_{i-1}) + \\ + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \int_a^b E \Rightarrow$$

$$\int_a^b E' \leq \int_a^b E$$

De manera análoga se demuestra **4.2.b**. Observemos que tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\int_a^b e \leq \int_a^b e' \leq \int_a^b E' \leq \int_a^b E$$

4.3. Si E, e: $[a, b] \to \mathbb{R}$ son las funciones escalonadas definidas en **4.1**, se tiene:

(4.3.a) $m(b - a) \leq \int_a^b E \leq M(b - a)$

(4.3.b) $m(b - a) \leq \int_a^b e \leq M(b - a)$

donde $m = \min f(x)$, $x \in [a, b]$, y $M = \max f(x)$, $x \in [a, b]$.

Estos resultados son de comprobación inmediata.

4.4. Vamos a ver que tomando una partición «suficientemente» fina, el valor $\int_a^b E - \int_a^b e$ se hace tan pequeño como queramos.

Formalizando, demostraremos lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \delta > 0 \quad , \quad |P| < \delta \Rightarrow \int_a^b E - \int_a^b e < \varepsilon(b - a)$$

Demostración

Se verifica

$$\int_a^b E - \int_a^b e = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Por ser f continua en $[a, b]$, f es uniformemente continua por el teorema de Heine; por tanto:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall x, x' \in [a, b] / x - x' / < \delta \Rightarrow / f(x) - f(x') / < \varepsilon$$

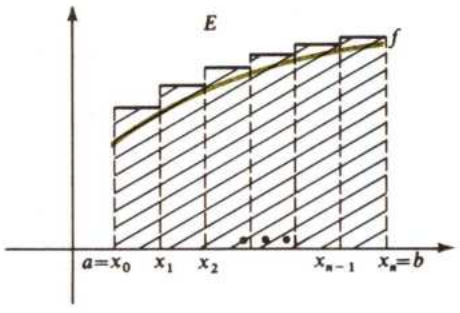
Tomando una partición P tal que $|P| < \delta$, se tiene:

$$0 \leq M_1 - M_1 < \varepsilon; \ 0 \leq M_2 - m_2 < \varepsilon; \ \ldots; \ 0 \leq M_n - m_n < \varepsilon$$

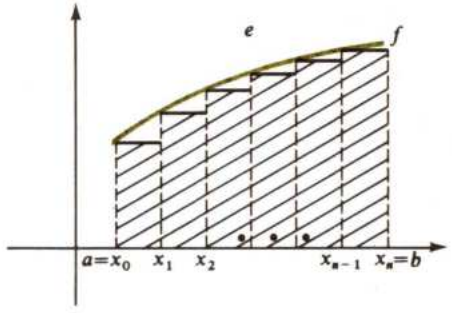
con lo cual:

$$0 \leq \int_a^b E - \int_a^b e < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

Nota: Observemos que si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, el área de los recintos determinados por e y E son aproximaciones por defecto y exceso, respectivamente, del área del recinto determinado por f, como podemos ver en las figuras 14a y 14b.



(Fig. 14a)



(Fig. 14b)

Intuitivamente se ve que las aproximaciones «mejoran» cuanto más fina sea la partición. Las áreas de los recintos limitados por E y e, respectivamente, son $\int_a^b E$, $\int_a^b e$, como ya vimos anteriormente. Si llamamos A al área del recinto determinado por f, se tiene que: $\int_a^b e \leq A \leq \int_a^b E$.

4.5. Consideremos $\{P_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$, $P_n \subset P_{n+1}$, $\forall n$, de modo que la sucesión de números reales positivos $\{|P_n|\}$, $n \in \mathbb{N}$ converja a 0. Se verifica:

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b E_n - \int_a^b e_n \right\} = 0$$

donde E_n, e_n son dos funciones escalonadas como las definidas en **4.1** correspondientes a P_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Efectivamente:

$$\text{Si } \lim_{n \to \infty} \{|P_n|\} = 0 \Rightarrow \forall \delta > 0,\ \exists r \in \mathbb{N},\ \forall n > r,\ |P_n| < \delta$$

por **4.4**, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |P_n| < \delta \Rightarrow \int_a^b E_n - \int_a^b e_n < \varepsilon(b - a)$$

Como $\forall n > r$ es $|P_n| < \delta$

se tiene $\int_a^b E_n - \int_a^b e_n < \varepsilon(b - a)$

Por tanto, $\lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b E_n - \int_a^b e_n \right\} = 0$

4.6. Las sucesiones $\left\{\int_a^b E_n\right\}$, $\left\{\int_a^b e_n\right\}$ son convergentes y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\}$$

Demostración

$\left\{\int_a^b E_n\right\}$ es acotada, ya que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m(b-a) \leq \int_a^b E_n \leq M(b-a)$$

donde $m = \min F(x),\ x \in [a, b]$ y $M = \max F(x),\ x \in [a, b]$

$\left\{\int_a^b E_n\right\}$ es monótona decreciente:

$$\forall n,\ P_n \subset P_{n+1} \Rightarrow \forall n, \int_a^b E_n \geq \int_a^b E_{n+1}$$

Por ser $\int_a^b E_n$ acotada y monótona, es convergente, y, por consiguiente, existe

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\}$$

Análogamente se ve que $\left\{\int_a^b e_n\right\}$ es monótona creciente y acotada y, por tanto, existe $\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\}$

Por otra parte:

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n - \int_a^b e_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} - \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\}$$

Este resultado permite dar la siguiente definición:

4.7. Dada la función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$, *llamaremos integral definida o simplemente integral* de f en $[a, b]$, y la representaremos por $\int_a^b f$ ó $\int_a^b f(x)\,dx$, al número:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\}$$

Se conviene además en definir $\int_a^a f = 0$, y si $b < a$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Observemos que por ser $\int_a^b E_n$ monótona decreciente y $\left\{\int_a^b e_n\right\}$ monótona creciente, de la definición de $\int_a^b f$ se deduce:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b e_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b E_n$$

Se puede demostrar que la definición de $\int_a^b f$ no depende de la sucesión $\{P_n\}$.

Nota: Si $F(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, $\int_a^b f$ mide el área A determinada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$, ya que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b e_n \leq A \leq \int_a^b E_n$$

y, por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\} = A = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} = \int_a^b f$$

Ejercicios:

1. Demostrar que si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$. (Indicación: Observar que en estas condiciones E_n, $e_n \geq 0$.)
2. Demostrar **4.2.b.**
3. Demostrar la proposición **4.3** e interpretarla gráficamente para el caso $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.
4. Demostrar que la sucesión $\left\{\int_a^b e_n\right\}$ definida en **3.6.** es monótona creciente y acotada.

5 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

Estudiamos en este epígrafe algunas propiedades de la integral de una función continua en un intervalo cerrado. Son análogas a las ya vistas para funciones escalonadas y se deducen de la definición de integral y de las propiedades de la integral de funciones escalonadas.

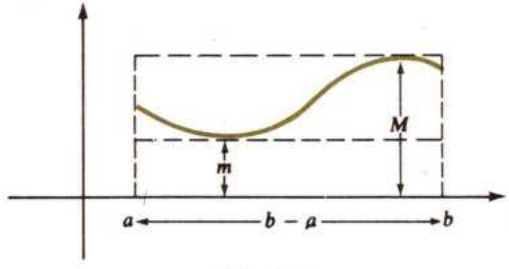
Consideremos una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$.

5.1. Si $M = \text{máx} f(x)$, $m = \text{mín} f(x)$, se verifica:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

Es decir: $\int_a^b f$ es acotada.

Obsérvese que si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, esta propiedad tiene un significado geométrico claro,como pone de manifiesto la figura 15. El área del recinto determinado por f es mayor que el área del rectángulo de base $(b - a)$ y altura m y menor que el área del rectángulo de base $b - a$ y altura M.



(Fig. 15)

La demostración de esta proposición es consecuencia de las siguientes desigualdades ya vistas:

$$m(b - a) \leq \int_a^b e_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b E_n \leq M(b - a), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

5.2. Si f y g son dos funciones cualesquiera, continuas en $[a, b]$, se verifica:

a) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; b) $\int_a^b cf = c \int_a^b$ donde $c \in \mathbb{R}$

Demostremos a):

Sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ con las condiciones de **4.5** Sean E'_n y e'_n las funciones escalonadas correspondientes a f y a cada partición P_n y E''_n, e''_n las correspondientes a g y a cada partición P_n. Finalmente sean E_n y e_n las funciones escalonadas correspondientes a $f + g$ y a cada partición P_n, y se tiene:

1) $$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b E'_n \right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b e'_n \right\}$$

2) $$\int_a^b g = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b E''_n \right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b e''_n \right\}$$

3) $$\int_a^b (f + g) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b E_n \right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b e_n \right\}$$

y las siguientes desigualdades para todo $[a', b'] \subset [a, b]$

$$\text{máx}(f + g)(x) \leq \text{máx}f(x) + \text{máx}g(x)$$
$$\text{mín}(f + g)(x) \geq \text{mín}f(x) + \text{mín}g(x)$$

de donde se deduce que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in [a, b]$

$$E_n(x) \leq E'_n(x) + E''_n(x)$$
$$e_n(x) \geq e'_n(x) + e''_n(x)$$

Por tanto:

$$\int_n^b E_n \leq \int_a^b (E'_n + E''_n) = \int_a^b E'_n + \int_a^b E''_n$$

$$\int_a^b e_n \geq \int_a^b (e'_n + e''_n) = \int_a^b e'_n + \int_a^b e''_n$$

Tomando límites en estas dos desigualdades, se tiene:

$$\int_a^b (f + g) = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} \leq \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E'_n + \int_a^b E''_n\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E'_n\right\} + \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E''_n\right\} = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Luego:

$$\int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \quad [1]$$

Haciendo lo mismo con la segunda desigualdad resulta:

$$\int_a^b (f + g) = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\} \geq \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e'_n + \int_a^b e''_n\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e'_n\right\} + \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e''_n\right\} = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Luego:

$$\int_a^b (f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g \quad [2]$$

De [1] y [2] se obtiene:

$$\boxed{\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g}$$

Para demostrar que $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ nos basaremos en los siguientes resultados válidos para cualquier intervalo $[a', b'] \subset [a, b]$.

Si $c \geq 0$ $\quad \underset{x \in [a', b']}{\text{máx}}(cf)(x) = c \cdot \underset{x \in [a', b']}{\text{máx}} f(x)$; $\quad \underset{x \in [a', b']}{\text{mín}}(cf)(x) = c \underset{x \in [a', b']}{\text{mín}} f(x)$

Si $c < 0$ $\quad \underset{x \in [a', b']}{\text{máx}}(cf)(x) = c \cdot \underset{x \in [a', b']}{\text{mín}} f(x)$; $\quad \underset{x \in [a', b']}{\text{mín}}(cf)(x) = c \underset{x \in [a', b']}{\text{máx}} f(x)$

Supongamos $c \geq 0$.

Sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ de las que estamos considerando. Para cada P_n sean E_n, e_n las funciones escalonadas correspondientes a f definidas en **4.1**. Como $\text{máx}cf = c\ \text{máx}f$ y $\text{mín}cf = c\ \text{mín}f$, las funciones escalonadas correspondientes a cf para cada partición P_n serán cE_n, ce_n.

Por tanto:

$$\int_a^b cf = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b cE_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{c\int_a^b E_n\right\} = c\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E_n\right\} = c\int_a^b f$$

Si $c < 0$ las funciones escalonadas correspondientes a cf para cada partición P_n serían $E'_n = c \cdot e_n$, $e'_n = cE_n$, ya que $\text{máx}(cf) = c\ \text{mín}f$ y $\text{mín}cf = c\ \text{máx}f$ en cualquier intervalo $[a', b'] \subset [a, b]$. Así:

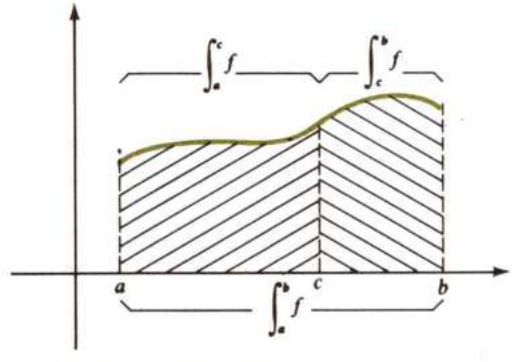
$$\int_a^b cf = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b E'_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b ce_n\Big\} = \lim_{n\to\infty}\left\{c\int_a^b e_n\right\} = c\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b e_n\right\} = c\int_a^b f$$

5.3. Si $c \in]a, b[$, se verifica:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Esta proporción es consecuencia inmediata de la análoga para funciones escalonadas enunciadas en **3.5**.

Si $f(x) \geq 0$, la figura 16 pone de manifiesto el significado intuitivo de esta propiedad.

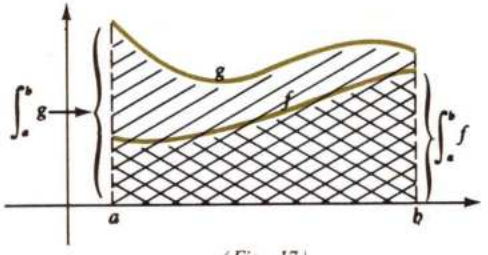


(Fig. 16)

5.4. Sean $f, g \in C[a, b]$. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

La figura 17 muestra el significado geométrico de esta propiedad si

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, b]$$



(Fig. 17)

Demostración

Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b (g - f) \geq 0 \Rightarrow$

$$\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f$$

5.5. Se verifica:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Observemos que $\int_a^b |f|$ tiene sentido dado que la función $|f|: [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$, $\forall x \in [a, b]$ es continua en $[a, b]$, pues es composición de dos funciones continuas: f y valor absoluto.

Demostración

Es consecuencia de la proposición anterior.

$$f(x) \leq |f|(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right| = \int_a^b |f|, \text{ ya que } \int_a^b |f| \geq 0$$

(ver ejercicio 2).

Ejercicios:

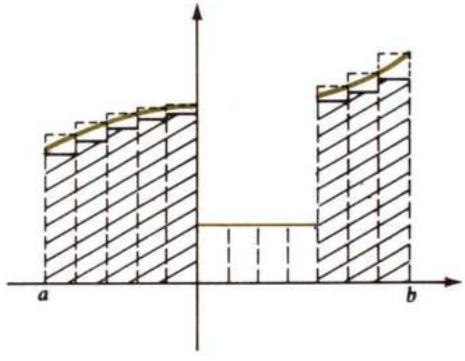
1. Demostrar la proposición **5.3.**
2. Demostrar que si $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y positiva, $\int_a^b F \geq 0$.

---

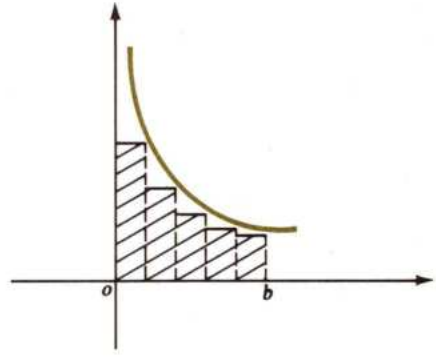
6 GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

6.1. En los apartados anteriores se ha estudiado el concepto de integral para una función continua; sin embargo, para muchas aplicaciones la exigencia de continuidad es demasiado restrictiva.

Si se analiza el método de aproximaciones sucesivas mediante funciones escalonadas, que condujo a la definición de integral de una función continua, se ve que dicho método parece poder aplicarse a la función cuya gráfica es la representada en la figura 18, mientras que no sucede lo mismo con la de la figura 19. Obsérvese que en esta última no se pueden realizar aproximaciones por exceso.



(Fig. 18)



(Fig. 19)

La diferencia esencial entre estos dos casos consiste en que la primera función está acotada en $[a, b]$, mientras que la segunda no lo está en $[o, a]$. Exigiremos que la función sea acotada en su intervalo de definición.

6.2. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Si existe un número y sólo uno, I, tal que para todo par de funciones escalonadas e, E, que verifiquen las condiciones:

$$\forall x \in [a, b] \qquad e(x) \leq f(x) \leq E(x)$$

se verifica $\int_a^b e \leq I \leq \int_a^b E$

entonces f se dice *Rieman-integrable en* $[a, b]$, o R-integrable, y el número I se dice la *integral de* f *en* $[a, b]$ y se representa por $\int_a^b f$.

6.3. Supongamos f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y R-integrable en $[a, b]$ y sea $\int_a^b f$ su integral; entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen un par de funciones escalonadas e y E tales que

$$\left(\int_a^b f\right) - \varepsilon < \int_a^b e \quad \text{y} \quad \int_a^b E < \left(\int_a^b f\right) + \varepsilon$$

En efecto, si no existe tal e, entonces para toda función escalonada e' se tiene $\int_a^b e' \leq \left(\int_a^b f\right) - \varepsilon$, pero entonces si e^* y E^* son funciones escalonadas tales que $\forall x \in [a, b]$, $e^*(x) \leq f(x) \leq E^*(x)$ se tiene:

$$\int_a^b e^* \leq \left(\int_a^b f\right) - \varepsilon < \int_a^b f \leq \int_a^b E$$

contradiciendo el hecho de que por ser f R-integrable sólo puede existir un *único* número entre $\int_a^b e$ y $\int_a^b E^*$
para todo e^* y E^* verificando $e^*(x) \leq f(x) \leq E^*(x)$.

La demostración de la existencia de E es análoga.

6.4. Una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ acotada se dice que verifica la *condición de Rieman* si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un par de funciones escalonadas e, E tales que $\forall x \in [a, b]$, $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$ y tales que $0 \leq \int_a^b E - \int_a^b e < \varepsilon$

Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ acotada; entonces f es R-integrable si y sólo si se verifica la condición de Rieman.

Supongamos f R-integrable. Por el teorema anterior, tomando $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existen dos funciones escalonadas e y E tales que

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b e \quad \text{y} \quad \int_a^b E < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, $-\int_a^b e < -\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$, y de aquí que $0 \leq \int_a^b E - \int_a^b e < \varepsilon$

Obsérvese que $\int_a^b E - \int_a^b e \geq 0$, ya que

$$\forall x \in [a, b],\ E(x) \geq e(x) \quad \text{y, por tanto,} \quad \int_a^b E \geq \int_a^b e$$

Recíprocamente, supongamos que f verifica la condición de Rieman; si f no fuese R-integrable existirían al menos dos números distintos I, I' tales que para todo par de funciones escalonadas e, E que verifican $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$ para todo $x \in [a, b]$ se tiene:

$$\int_a^b e \leq I \leq \int_a^b E \quad \text{y} \quad \int_a^b e \leq I' \leq \int_a^b E$$

Supongamos $I < I'$ y tenemos $\varepsilon = I' - I > 0$, entonces:

$$0 < \varepsilon \leq \int_a^b E - \int_a^b e$$

lo que contradice el que f verifica la condición de Rieman.

Ejemplo:

- Consideremos la función $f\,[0,\,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 1 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Entonces f no es R-integrable, ya que no verifica la condición de Rieman.

En efecto, sea $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$; entonces deben existir un par de funciones escalonadas e y E tales que para todo $x \in [a,\,b]$, $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$ y tales que $0 \leq \displaystyle\int_0^1 E - \int_0^1 e < \varepsilon$.

Ahora bien, en cada subintervalo de definiciones de E existen puntos irracionales; por tanto, en esos puntos $f(x) = 1$ y $E(x) \geq 1$, análogamente $e(x) \leq 0$; por consiguiente, $\displaystyle\int_0^1 E - \int_0^1 e \geq 1$, contradicción. Por tanto, f no verifica la condición de Rieman y, por consiguiente, no es integrable.

Es inmediato ver que si f: $[a,\,b] \to \mathbb{R}$ es continua, es R-integrable, y que la integral, en el sentido definido en este apartado, es precisamente la integral definida en el apartado **4** para funciones continuas.

6.5. Finalmente vamos a estudiar una última generalización del concepto de integral. Hasta el momento hemos estudiado la integral de funciones acotadas definidas sobre un intervalo cerrado acotado $[a,\,b]$. Nos proponemos ahora generalizar el concepto de integral en dos direcciones:

a) Si $a = -\infty$ o $b = +\infty$, o ambos.
b) Si el intervalo $[a,\,b]$ está acotado, pero f no está acotada en dicho intervalo.

Caso a)

Sea f: $[a,\,+\infty[\to \mathbb{R}$ una función tal que para todo $a \leq x$ existe $\displaystyle\int_a^x f = I(x)$; entonces, si existe $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x)$ y es finito se dice que f es *integrable entre a y* $+\infty$ y el valor de dicho límite se escribe $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Análogamente, sea f: $]-\infty,\,b[$ una función tal que para todo $x \leq b$ existe $\displaystyle\int_x^b f = I(x)$; entonces, si existe $\lim\limits_{x \to -\infty} I(x)$ y es finito, se dice que f es *integrable entre* $-\infty$ *y* b y dicho límite se escribe $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$.

Finalmente, sea f: $]-\infty,\,+\infty[\to \mathbb{R}$; si existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que existen $\displaystyle\int_{-\infty}^c f$ y $\displaystyle\int_c^{+\infty} f$ se dice que f *es integrable entre* $-\infty$ *y* $+\infty$ y se define

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{+\infty} f$$

Ejemplos:

- Sea f: $[1,\,+\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Entonces:

$$I(x) = \int_1^x f = \left[\frac{-1}{x}\right]^x = \frac{-1}{x} + 1$$

Entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x) = +1$; por tanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = +1$.

• Consideremos ahora $f\colon]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$; se sabe que

$$I(x) = \int_x^0 f = [e^x]_x^0 = 1 - e^x$$

Entonces, $\int_{-\infty}^0 f = \lim_{x \to -\infty} (1 - e^x) = 1.$

Nota: Al definir $\int_{-\infty}^{\infty} f$ se eligió un punto arbitrario c tal que $\int_{-\infty}^c f$ y $\int_c^{+\infty} f$ existan, se puede demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ no depende del punto c elegido.

Caso b)

Supongamos $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ una función tal que $\int_a^x f$ existe para todo $x \in [a, b[$. Sea $I(x) = \int_a^x f$; entonces si existe y es finito $\lim_{x \to b^-} I(x)$, este límite se llama la *integral de f entre a y b* y se escribe $\int_a^{b^-} f$.

De la misma forma se define $\int_{a_+}^b f$ para funciones $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ como $\int_{a_+}^b f = \lim_{x \to a_+} I(x)$, donde $I(x) = \int_x^b f$ para $x \in]a, b]$.

Ejemplos:

• Consideremos $\int_{0+}^1 f$, donde $f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$I(x) = \int_x^1 f = [Lx]_x^1 = -Lx$$

$\lim_{x \to 0^+} I(x) = +\infty$ que no es finito.

Luego no existe $\int_{0^+}^1 f$.

• Sea $f\colon [0, 1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

Entonces, $I(x) = \int_0^x f = [-2\sqrt{1 - x}]_0^x = 2 - 2\sqrt{1 - x}$

y $\lim_{x \to 1^-} I(x) = 2$. Luego $\int_0^{1^-} f = 2$.

Nota: Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene un número finito de puntos en que no está acotada: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, entonces se define:

$\int_a^b f = \int_a^{x_0^-} f + \int_{x_0^+}^{x_1^-} f + \cdots + \int_{x_n^+}^b f$, supuesto que todas las integrales de la suma existan (x_0 puede ser a y $x_n b$).

EJERCICIOS FINALES

1. Modificar el método exhaustivo de Arquímedes para calcular el área determinada por la curva de ecuación $f(x) = 2x^2 + 1$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 2$.

   La misma cuestión para el área determinada por $f(x) = x^3$, el eje OX y la recta $x = a$.

2. Dadas las funciones escalonadas E, E': $[-1, 2] \to \mathbb{R}$:

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -2 & \text{si} \quad -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

$$E'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

   calcular:

   a) $\int_{-1}^{2} (2E - E')$ b) $\int_{-1}^{2} |E|$ c) $\int_{-1}^{2} |E'|$

3. Demostrar que si E, E': $[a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones escalonadas y c, $d \in \mathbb{R}$:

   a) $|cE| = |c||E|$

   b) $\left|\int_a^b cE\right| \leq |c| \int_a^b |E|$

   c) $\left|\int_a^b (cE + dE')\right| \leq |c| \int_a^b |E| + |d| \int_a^b |E'|$

4. Calcular el área del recinto limitado por la función escalonada

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad -3 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x \leq -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

   las rectas $x = -3$, $x = 1$ y el eje OX.

5. Demostrar que si E es una función escalonada E: $[a, b] \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ y E': $[a + c, b + c] \to \mathbb{R}$ está definida por $E'(x) = E(x - c)$, entonces E' es escalonada y $\int_a^b E = \int_{a+c}^{b+c} E'$.

6. Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, E: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada. Demostrar que E': $[ca, cb] \to \mathbb{R}$ definida por $E'(x) = E\left(\frac{x}{c}\right)$ es escalonada y $\int_{ca}^{cb} E' = c \int_a^b E$.

7. Demostrar propiedades análogas a las establecidas en 5 para la integral de funciones continuas.

8. Sea $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in [-a, a]$ $f(-x) = f(x)$. Demostrar:

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$$

9. Sea $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in [-a, a]$, $f(-x) = -f(x)$. Demostrar que $\int_{-a}^{a} f = 0$.

10. Dar interpretaciones geométricas de los resultados de los problemas 8 y 9.

11. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\int_{a}^{b} f = (b - a)\int_{0}^{1} g$, donde $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = f(a) + (b - a)x$.

12. Calcular $\int_{0}^{b} f$, donde $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ (f es la identidad).

13. Demostrar que $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 2 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ no es R-integrable.

14. Calcular si existen:

$$\int_{1}^{\infty} f,\ f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad \int_{2}^{5} f,\ f\colon [2, 5[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x - 5}$$

$$\int_{-\infty}^{2} f,\ f\colon]-\infty, 2[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x}} \qquad \int_{0^+}^{\infty} f,\ f\colon]0, \infty] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^{2/5}}$$

$$\int_{-1^+}^{1} f,\ f\colon]-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + \frac{1}{x + 1}$$

ARQUIMEDES

Matemático e ingeniero griego (287-212 a. de C.). Además de sus descubrimientos en la Física (la ley de la palanca y el principio que lleva su nombre), desarrolló el método de exhaución, que le permitió obtener la fórmula del área del círculo y de otras figuras. Se ha dicho que Arquímedes hubiera descubierto el cálculo dos mil años antes que Newton con sólo haber contado con un sistema apropiado de símbolos matemáticos.

RIEMAN (Bernhard)

Matemático alemán (1826-1866). Estudió matemáticas en Gotinga con Gauss. En 1857 fue nombrado profesor extraordinario en la Universidad de Gotinga y dos años después sucedió a Dirichlet en la cátedra de Matemáticas de la misma Universidad.

Sus trabajos tuvieron una resonancia considerable en la Matemática. En su tesis doctoral, *Tratado de la teoría general de las funciones de variable compleja*, introdujo las célebres superficies que llevan su nombre, y en su tratado *Fundamentos de las hipótesis de la geometría*, desarrolló la idea de una geometría fundada sobre la hipótesis de que por un punto no puede trazarse ninguna paralela a una recta. El espacio que Rieman concebía parece estar más próximo al que se considera actualmente en la teoría de la relatividad.

TEMA 21
EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

En este tema se conecta el concepto de integral definida para una función continua (estudiado en el tema anterior) y el de primitiva. Esta conexión se efectúa a través de la regla de Barrow, que permite calcular el valor de una integral definida conocida una primitiva cualquiera de la función integrando. Esta regla se obtiene como una sencilla consecuencia del teorema fundamental del cálculo integral, que se expone también en el tema.

Finalmente, se estudia el teorema del valor medio para integrales (consecuencia del teorema de valores intermedios para funciones continuas, ya estudiado anteriormente), teorema que tiene una sencilla interpretación geométrica.

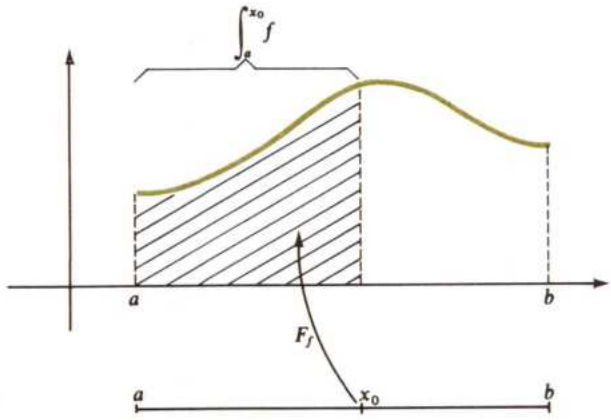
1 FUNCIÓN INTEGRAL ASOCIADA A UNA FUNCIÓN CONTINUA

1.1. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. La función

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{F_f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & F_f(x) = \displaystyle\int_a^x f \end{array}$$

se llama *función integral* asociada a f. Con otra notación, escribiremos $F_f(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, F_f asocia a cada $x \in [a, b]$ el valor del área encerrada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = x_0$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

Se verifica el siguiente teorema:

1.2. *Teorema fundamental del cálculo integral.*

Si $F_f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es la función integral asociada a la función continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, se verifica:

a) F_f *es continua en* $[a, b]$.

b) F_f *es derivable en* $[a, b]$, *y además,* $F_f'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Demostración

a) Demostraremos que F_f es continua en cualquier punto $x_0 \in [a, b]$.

Tenemos que ver:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |F_f(x) - F_f(x_0)| < \varepsilon$$

Si $x \geq x_0$: $\displaystyle\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x} f = \int_a^x f \Rightarrow \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^x f \Rightarrow$

$$F_f(x) - F_f(x_0) = \int_{x_0}^x f \Rightarrow |F_f(x) - F_f(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \geq \int_{x_0}^x |f|$$

Como $\displaystyle\int_{x_0}^x |f| \leq M(x - x_0)$, siendo $M = \text{máx}|f(x)| \geq 0$, $x \in [a, b]$,

se deduce:

$$|F_f(x) - F_f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

Si $x < x_0$: $\displaystyle\int_a^x f + \int_x^{x_0} f = \int_a^{x_0} f \Rightarrow \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = -\int_x^{x_0} f \Rightarrow$

$$F_f(x) - F_f(x_0) = -\int_x^{x_0} f \Rightarrow |F_f(x) - F_f(x_0)| = \left|-\int_x^{x_0} f\right| = \left|\int_x^{x_0} f\right| \Rightarrow$$

$$|F_f(x) - F_f(x_0)| \leq \int_x^{x_0} |f| \leq M(x_0 - x) = M|x - x_0|$$

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ en ambos casos:

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |F_f(x) - F_f(x_0)| \leq M|x - x_0| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

b) Probaremos ahora que F_f es derivable en cualquier punto $x_0 \in [a, b]$.
Tenemos que demostrar que existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_f(x_0 + h) - F_f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x_0 + h} f - \int_a^{x_0} f}{h}$$

Lo probaremos viendo que existen los límites cuando $h \to 0$ por la derecha y por la izquierda y que estos límites coinciden:

$$Si\ h > 0,\ \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+h} f = \int_a^{x_0+h} f \Rightarrow \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F_f(x_0 + h) - F_f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h}$$

Sean $f(x_1) = \min f(x)$ y $f(x_2) = \max f(x)$, que existen por ser f continua en $[x_0, x_0 + h]$.

Se verifican las siguientes desigualdades:

$$f(x_1)(x_0 + h - x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f \leq f(x_2)(x_0 + h - x_0),\ \text{es decir,}$$

$$f(x_1)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f \leq f(x_2)h \Rightarrow f(x_1) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} \leq f(x_2)$$

Tomando límites:

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_1) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} f(x_2)$$

Por ser f continua en $[a, b]$, y como $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + h]$, se verifica:

$$\lim_{h\to 0} f(x_1) = f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_2)$$

Por tanto:

$$f(x_0) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} \leq f(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{F_f(x_0 + h) - F_f(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Si $h < 0$, la demostración se efectúa de forma análoga, teniendo presente que $x_0 + h < x_0$.

Ejemplos:

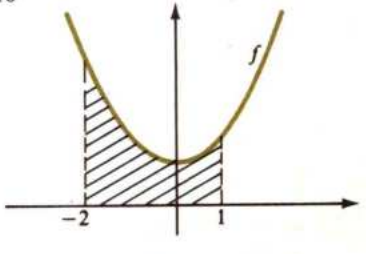
- El valor de $F'_f(3)$, donde $f[-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x^2 + 1$, es:

$$F'_f(3) = f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

La función integral F_f es, en este caso,

$$\begin{array}{ccc} [-2, 5] & \xrightarrow{F_f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & F_f(x) = \int_{-2}^{x} (t^2 + 1)\, dt \end{array}$$

$F_f(1) = \int_{-2}^{1} (t^2 + 1)\, dt$ mide el área determinada por f, el eje OX y las rectas $x = -2$, $x = 1$ (Fig. 2).



(Fig. 2)

• La derivada de la función $F(x) = \int_0^x (2e^t - 3t + 2)\,dt$ es $F'(x) = 2e^x - 3x + 2$

Ejercicios:

1. Escribir las funciones integrales asociadas a las funciones:
   a) $f: [-3, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + x - 1$
   b) $g: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
   c) $h: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = 2\cos x - \operatorname{sen}^2 x$
2. Calcular $F'_f(2)$, $F'_g(0)$, $F'_h(\pi/2)$, siendo f, g, h las funciones definidas en el ejemplo anterior.
3. Derivar las siguientes funciones:
   a) $F(x) = \left[\int_0^x (\operatorname{sen} + \cos^2 t)\,dt\right]^3$
   b) $G(x) = \int_{-2}^x te^{2t}\,dt - 2\int_0^x (t^2 - 2t + 1)\,dt$
   c) $H(x) = e^{\int_0^{x(t^3 - 2\operatorname{sen} t)\,dt}}$

2 REGLA DE BARROW

La regla de Barrow, consecuencia inmediata del teorema fundamental del cálculo integral, conecta el concepto de una función con el de integral, además de proporcionar un procedimiento para su cálculo.

2.1. Si f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y F una primitiva de ésta, se verifica:

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

En efecto, consideremos la función integral asociada a f,

$$\begin{aligned} [a, b] &\xrightarrow{F_f} \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow F_f(x) = \int_a^x f \end{aligned}$$

Como $F'_f(x) = f(x)$, F_f es una primitiva de f. Si F es otra primitiva de f, se tiene:

$$F_f(x) = F(x) + C$$

Así:

$$F_f(a) = \int_a^a f = 0 = F(a) + C \Rightarrow -F(a) = C$$

$$F_f(b) = \int_a^b f = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

Por comodidad, escribiremos:

$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Con esta notación la regla de Barrow se escribe:

$$\boxed{\int_a^b f = \Big[F(x)\Big]_a^b}$$

Ejemplos:

- Dada la función $f: [-3, 5] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 2$, una primitiva de esta función es
$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x.$$
Por tanto:
$$\int_{-3}^{5} (3x + 2)\,dx = F(5) - F(-3) = \left(\frac{3}{2}\cdot 5^2 + 2\cdot 5\right) - \left(\frac{3}{2}(-3)^2 + 2(-3)\right) = 40$$

- Como $F(x) = 2\,\text{sen}x$ es una primitiva de $f(x) = 2\cos x$, se tiene:
$$\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - 2\,\text{sen}\,0 = 2$$

- Calculemos $\displaystyle\int_1^e \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$
$$\int_1^e \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \Big[L|x^2+x|\Big]_1^e = L(e^2+e) - L_2$$

Ejercicios:

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

b) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x - 3)\,dx$

c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{L_2} xe^x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 e^{2|x|-1}\,dx$

2. Dada la función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5 \text{ si } x \leq 2 \\ x^2 + 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

calcular $\int_1^4 f(x)dx$

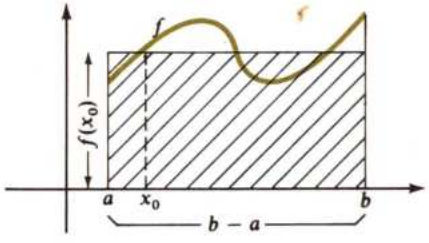
3 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Existe al menos un $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(x_0)(b - a)$$

Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, el teorema anterior tiene un significado intuitivo claro:

El área del rectángulo de base $(b - a)$ y altura $f(x_0)$ es igual al área del recinto determinado por f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$ (Fig. 3).



(Fig. 3)

Demostración

Si $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ y $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$

sabemos:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

Entonces, tomando $y_0 = \dfrac{\int_a^b f}{b - a}$ se tiene que $y_0 \in [m, M]$.

Como f es continua en un intervalo cerrado, toma todo valor comprendido entre el mínimo y el máximo. Por tanto:

$$\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = y_0 \Rightarrow \int_a^b f = f(x_0)(b - a)$$

Ejemplo:

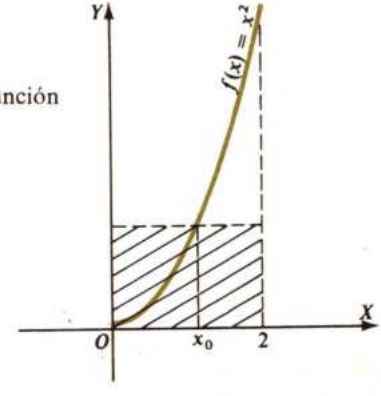
- Comprobemos el teorema del valor medio para la función

$$\begin{array}{rcl} f[0, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 x^2\,dx = f(x_0)(2 - 0) \Rightarrow f(x_0) = \frac{8}{6}$$

Como $f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = \dfrac{8}{6} \Rightarrow x_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \in [0, 2]$



(Fig. 4)

EJERCICIOS FINALES

1. Derivar las siguientes funciones integrales:

   a) $F(x) = \int_0^x e^{\cos t}\, dt$ b) $G(x) = \int_{-5}^x |t + 2|\, dt$ c) $H(x) = \int_{-2}^x \operatorname{arc\,tg}(t^2 + 1)\, dt$

2. Calcular $F'(\pi)$, $F'(\pi/2)$, $G'(-3)$, $G'(1)$, $H'(0)$, $H'(-1)$, siendo F, G, M las funciones integrales del problema anterior.

3. Derivar las siguientes funciones:

   a) $F(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt\right)\left(\int_0^x t^2\, dt\right)$

   b) $G(x) = \left(\int_{-1}^x \operatorname{sen}^2 t\, dt\right)^{1/2}$

   c) $H(x) = \operatorname{sen}^2\left(\int_{-2}^x t\, dt\right)$

   d) Calcular $F'(0)$. $G'(\pi)$, $H'(0)$.

4. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

   b) $\int_1^3 e^{x-1}\, dx$

   c) $\int_0^\pi e^x \cos x\, dx$

   d) $\int_0^1 \frac{3\, dx}{x^2 + 1}$

   e) $\int_{-\pi}^\pi \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$

   f) $\int_0^1 \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}\, dx$

   g) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x + 3)(x + 2)}\, dx$

   h) $\int_2^3 \frac{dx}{x(x - 1)}$

5. Comprobar el teorema del valor medio del cálculo integral para las siguientes funciones:

   a) $f: [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = x^2 - 5$

   b) $g: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow g(x) = \operatorname{sen} x$

   c) $h: [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow h(x) = |3x - 1|$

BARROW (Isaac)

Matemático inglés (1630-1677). Maestro de Newton. Descubrió la relación existente entre los dos problemas más fecundos del cálculo: el problema de hallar el área de una región limitada por una curva y el de hallar la tangente a una curva en un punto. Sin embargo, fueron Newton y Leibniz los primeros que comprendieron la verdadera importancia de esta relación y la explotaron de tal forma, que se puede decir que iniciaron una etapa sin precedentes en el desarrollo de la Matemática.

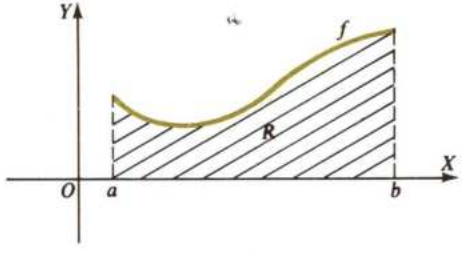
TEMA 22 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En este tema se dan algunas aplicaciones sencillas del cálculo integral: geométricas (cálculo del área de recintos planos y volúmenes de revolución, longitudes de arcos, etc.) y físicas (movimiento rectilíneo y trabajo de una fuerza).

1 ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

1.1. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Llamemos R al recinto plano limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$ (Fig. 1). El área de este recinto lo denotaremos por $A(R)$ y, según la definición, viene dada por:

$$A(R) = \int_a^b f$$



(Fig. 1)

Ejemplos:

- Calcular el área determinada por la curva de ecuación $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 4$.

  La curva es una semiparábola de eje OX, y la región cuya área se quiere determinar es la rayada en la figura 2.

  Entonces: $A(R) = \int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx$.

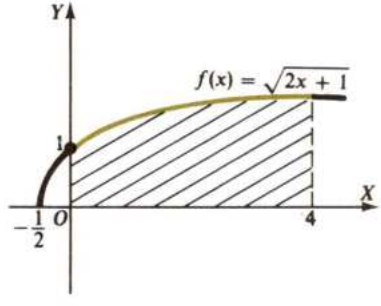
  Para calcular esta integral hacemos

  $2x + 1 = t^2$, $2\, dx = 2t\, dt$. Entonces:

  $$\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x + 1)^3} + C$$

  resulta así:

  $$A(R) = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x + 1)^3}\right]_0^4 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$



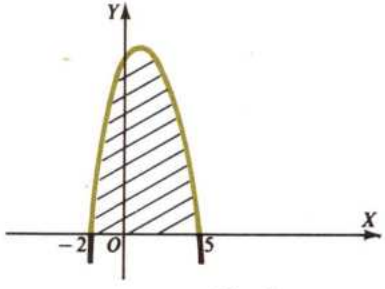
(Fig. 2)

- Encontrar el área limitada por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 3x + 10$ y el eje de abscisas.

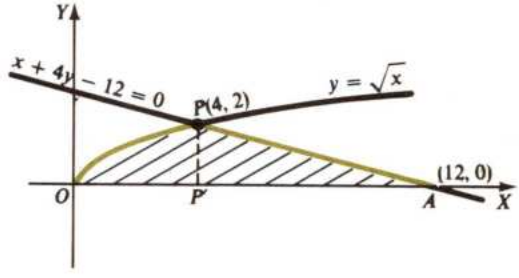
  Los puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$, es decir, $-x^2 + 3x + 10 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = -2$ y $x = 5$.

  La región cuya área queremos determinar es la representada en la figura 3.

  Se tiene entonces $A(R) = \int_{-2}^{5} (-x^2 + 3x + 10)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 10x\right]_{-2}^{5} = \frac{343}{6}$



(Fig. 3)



(Fig. 4)

- Encontrar el área del recinto dibujado en la figura 4.

  Las coordenadas de P se encuentran resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ 4y + x - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = x \\ 4y + x - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -6,\ y = 2$$

  Luego la ordenada de P debe ser 2. Entonces, $x = y^2 = 4$, P tiene de coordenadas (4, 2).

  Las coordenadas de A son (12, 0).

$$A(\text{recinto } OPP') = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$A(\text{recinto } P'PA) = \int_4^{12} \frac{12 - x}{4}\,dx = \left[\frac{1}{4}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_4^{12} = 8$$

  El área pedida es $\frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}$

1.2. Supongamos ahora una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Su representación gráfica será una curva situada bajo el eje OX.

Llamemos R al recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las abscisas $x = a$, $x = b$. Si calculamos $\int_a^b f$ obtendremos un número negativo, el cual no representa el valor de $A(R)$, dado que no tiene sentido para nosotros hablar de áreas negativas de acuerdo con nuestra intuición geométrica.

Consideremos la función

$$\begin{array}{rl} (-f)\colon [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow (-f)(x) = -f(x) \end{array}$$

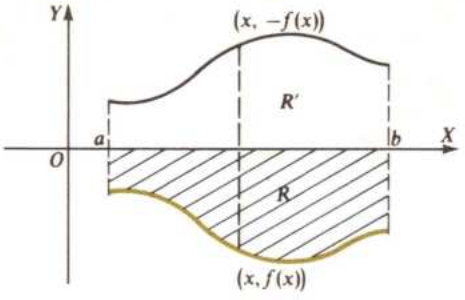
La gráfica de $-f$ es simétrica de la de f respecto del eje OX. Por otra parte, observamos que las áreas del recinto R y del determinado por $(-f)$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$, R', son iguales (Fig. 5).

Dado que $(-f)(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, se tiene:

$$A(R') = \int_a^b -f = -\int_a^b f$$

Por tanto:

$$\boxed{A(R) = -\int_a^b f}$$

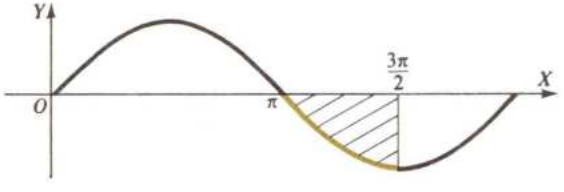


(Fig. 5)

Ejemplo:

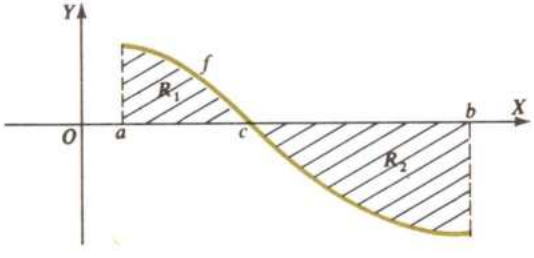
- Calcular el área del recinto determinado por el eje de abscisas y la función de semionda de sen$x$ determinada por los puntos de abscisa π y $\frac{3\pi}{2}$ (Fig. 6).

$$A(R) = -\int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = [\cos x]_{\pi}^{3\pi/2} = 1$$



(Fig. 6)

1.3. Supongamos que la función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ se anula y cambia de signo en $c \in]a, b[$. El recinto R que determinan f, OX, $x = a$, $x = b$ está dividido en dos partes R_1 y R_2, una de ellas situada en el semiplano positivo y otra en el negativo (Figura 7).



(Fig. 7)

Suponiendo R_1 la parte positiva del recinto:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_a^c f + \left(-\int_c^b f\right) = \int_a^c f - \int_c^b f$$

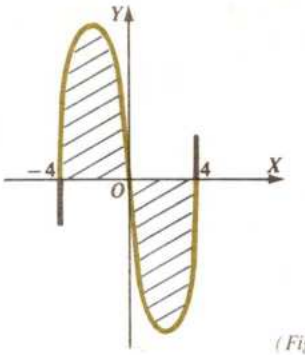
Esto se generaliza de forma inmediata al caso en que f corta al eje OX más de una vez en $]a, b[$.

Ejemplo:

- Calcular el área del recinto determinado por la curva $y = x^3 - 16x$ y el eje de abscisas (Fig. 8).

$$A(R) = \int_{-4}^{0} (x^3 - 6x)\,dx - \int_{0}^{4} (x^3 - 16x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 8x^2\right]_{-4}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - 8x^2\right]_{0}^{4} = 64 - (-64) = 128$$

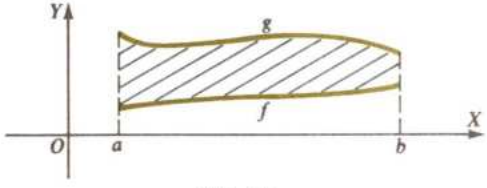


(Fig. 8)

1.4. Calcularemos a continuación áreas de recintos planos más generales.

Consideraremos recintos que no estén limitados por OX, sino que lo estén en su parte superior e inferior por funciones continuas.

Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas, tal que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Designemos por R_1 al recinto limitado por g, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$. Análogamente, designemos por R_2 al recinto limitado por la gráfica de f, OX y las mismas rectas anteriores. Suponiendo $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, el área del recinto R de la figura 9 será:



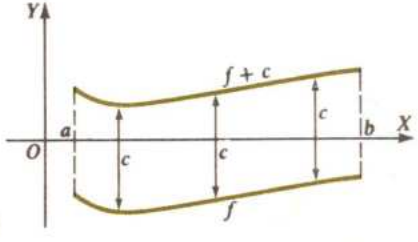
(Fig. 9)

$$A(R) = A(R_1) - A(R_2) = \int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f)$$

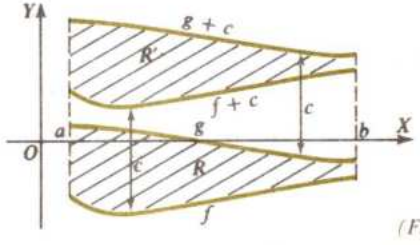
Supongamos ahora que f no está sometida a la condición $f(x) \geq 0$.

Consideremos las funciones $f + c, g + c: [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por $(f + c)(x) = f(x) + c$, $(g + c)(x) = g(x) + c$, donde $c \geq 0$.

La única diferencia entre las curvas f y $f + c$ es que la gráfica de $f + c$ se ha alejado de la de f, paralelamente al eje OY, una distancia c y en sentido positivo (Fig. 10). Lo mismo ocurre con $g + c$ respecto de g.



(Fig. 10)



(Fig. 11)

Las áreas de los recintos R y R' de la figura 11 son iguales. La única diferencia entre R y R' es que están situados en lugares distintos. Por tanto: $A(R) = A(R')$

Si $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ verifican $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, se verifica también

$$(f + c)(x) \leq (g + c)(x), \ \forall x \in [a, b]$$

Por otra parte, siempre podremos encontrar un $c \geq 0$ lo suficientemente grande tal que $(f + c)(x) \geq 0$. Para un c con estas características, R' es un recinto que está situado en el semiplano positivo. Por tanto:

$$A(R') = \int_a^b [g + c - (f + c)] = \int_a^b (g - f)$$

que es la misma fórmula que la obtenida al principio del párrafo.

Ejemplos:

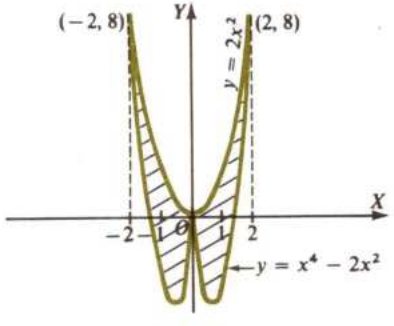
- Hallar el área determinada por las curvas $y = x^4 - 2x^2$ e $y = 2x^2$. Los puntos de intersección de ambas curvas con las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 2 \text{ y } x = -2$$

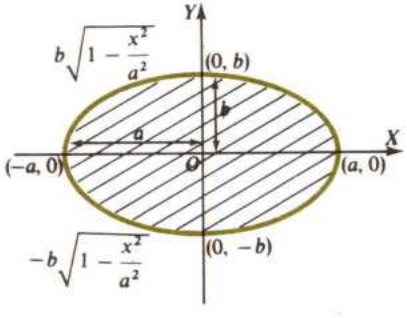
El recinto cuya área queremos calcular está representado en la figura 12.

Como se ve, las curvas son simétricas respecto del eje de ordenadas; por tanto, basta hallar el área de uno de los recintos, y el área total será el doble.

$$A(R) = 2 \int_0^2 [2x^2 - (x^4 - 2x^2)]\, dx = 2 \int_0^2 (-x^4 + 4x^2)\, dx = \frac{128}{15}$$



(Fig. 12)



(Fig. 13)

- Hallemos ahora el área que encierra la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 13).

La curva que determina el recinto corta a OX en los puntos (a, o), $(-a, o)$. Despejando y en la ecuación de la elipse, se obtiene:

$$y = \pm\, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Tenemos, pues, dos funciones $f, g: [-a, b] \to \mathbb{R}$ definidas:

$$f(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad g(x) = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

cuyas gráficas corresponden a las semielipses situadas, respectivamente, en los semiplanos positivo y negativo.

El área del recinto R que determina la elipse es:

$$A(R) = \int_{-a}^{a} [g - f] = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Para calcular $\int\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = a\cos dt$$

$$\int\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \int\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\; a\cos t\,dt = a\int\cos^2 t\,dt = \frac{a}{2}\int(1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) + C$$

Como $t = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$, nos queda:

$$\int\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right)\right) + C$$

Pero $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right) = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Por lo tanto:

$$\int\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]_{-a}^{a} = \frac{a}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} = \frac{a\pi}{2}$$

El área pedida será:

$$A(R) = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2b\frac{a\pi}{2} = \pi ab$$

Nota: Cuando $a = b$, la elipse se convierte en una circunferencia de radio a; según lo anterior, el área del círculo que determina será πa^2.

Ejercicios:

1. Calcular el área limitada por el eje x, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las ordenadas que se indican:
   a) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$, $x = 0$, $x = 4$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$, $x = 1$, $x = 3$
   c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{6x^2 + 1}}$, $x = 0$, $x = 4$
2. Hallar el área entre la curva $y = \sqrt{1 - x}$ y los ejes de coordenadas.
3. Calcular el área limitada por la curva $x = 1 - y^2$ y el eje OY.
4. Determinar el área comprendida entre las curvas de ecuaciones $y = 2 - x^2$, $y + x = 0$.

5. Hallar el área del triángulo mixtilíneo situado en el primer cuadrante y limitado por el eje OY y las curvas $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$.

6. Calcular el área determinada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$.

7. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

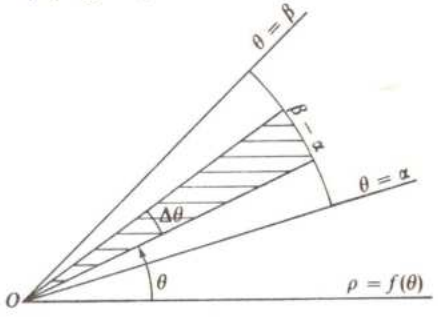
el eje OX y la ordenada $x = 5$.

2 ÁREA DE FIGURAS PLANAS EN COORDENADAS POLARES

Consideremos la superficie limitada por las semirrectas de ecuación $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y la curva de ecuación polar $\rho = f(\theta)$ (f continua) (Fig. 14).

Si dividimos el ángulo $\beta - \alpha$ en n partes iguales, cada una de estas partes determina una franja como la rayada en la figura 7. Esta área se puede aproximar mediante el área de sectores circulares de centro O y radio $\rho = f(\xi)$, donde $\theta < \xi < \theta + \Delta\theta$.

El área de uno de estos sectores es $\frac{1}{2}\rho^2\xi$ y, por tanto, el área del recinto será, aproximadamente, $\sum \frac{1}{2}\rho^2\xi$.



(Fig. 14)

Si se aumenta el número de subdivisiones del ángulo, $\sum \frac{1}{2}\rho^2\xi$ se aproxima cada vez más al valor del área de la región, pudiendo demostrarse que $A(R) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta$.

Ejemplos:

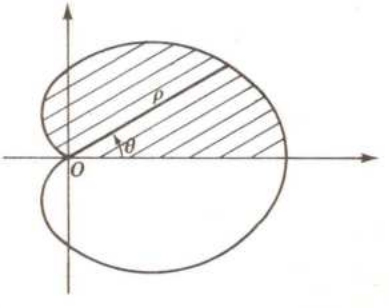
- Hallar el área encerrada por la cardioide de ecuación $\rho = a(1 + \cos\theta)$. (Ver figura 15.)

Observemos que la figura es simétrica respecto del eje de abscisas; el área será el doble de la del recinto rayado:

$$A = 2\int_0^\pi \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = a^2\int_0^\pi (1 + \cos\theta)^2\, d\theta =$$

$$a^2\int_0^\pi (1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= a^2\left[\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\theta\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$$



(Fig. 15)

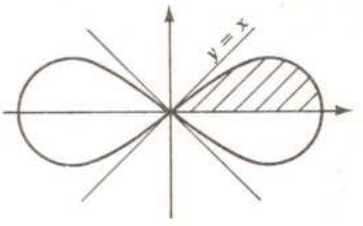
● La curva de la figura 16 se llama lemniscata, y su ecuación en coordenadas polares es $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

Hallar su área.

Basta calcular el área de uno de los cuatro recintos.

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\, d\theta = a^2\left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

Luego el área de la lemniscata será $A = 4\dfrac{a^2}{2} = 2a^2$



(Fig. 16)

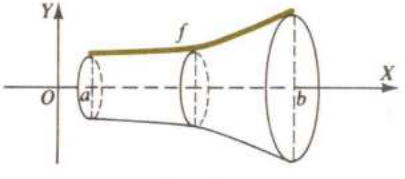
Ejercicios:

1. Encontrar el área de la circunferencia de ecuación polar $\rho = 2a\cos\theta$.
2. Calcular el área encerrada por la curva de ecuación polar $\rho^2 = 4a^2 \cos 2\theta$.
3. Hallar el área encerrada por la circunferencia de centro el origen y radio r, exterior a la cardioide de ecuación polar $\rho = r(1 - \cos\theta)$.
4. Hallar el área de la región determinada por la curva $\rho = 4 + \cos\theta$.

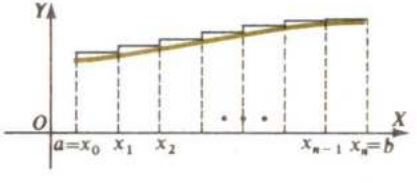
3 VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN DETERMINADOS POR FUNCIONES CONTINUAS

3.1. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Sea R el recinto limitado por f y el eje OX entre las rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$.

Al girar R alrededor de OX determina un sólido de revolución (Fig. 17). El propósito de este apartado es el cálculo de volúmenes de este tipo.



(Fig. 17)



(Fig. 18)

3.2. Consideremos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $M_i = \max f(x)$, $i = 1 \ldots n$ y consideremos la función escalonada $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (Fig. 18).

E: $[a, b] \to \mathbb{R}$ definida.

$$E(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si } a = x_0 \le x \le x_1 \\ M_2 & \text{si } x_1 < x \le x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n & \text{si } x_{n-1} < x \le x_n = b \end{cases}$$

$E(x)$ determina un recinto plano con OX. Al girar alrededor de OX determina un sólido de revolución cuyo volumen viene dado por la figura 19:

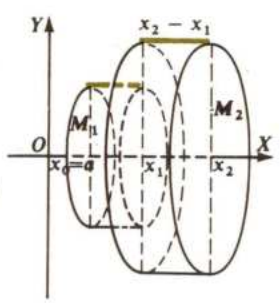
$$\pi M_1^2(x_1 - x_0) + \pi M_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + \pi M_n^2(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \pi[M_1^2(x_1 - x_0) + M_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n^2(x_n - x_{n-1})]$$

Como

$$\int_a^b E^2 = M_1^2(x_1 - x_0) + M_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n^2(x_n - x_{n-1})$$

el volumen del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_a^b E^2$$



(Fig. 19)

3.3. El volumen que determina E al girar alrededor de OX es una «aproximación» del que determina la función continua f. Cuanto más fina sea la partición P, más se aproximarán los dos volúmenes. Como $\pi\int_a^b E^2$ es una «aproximación» de $\pi\int_a^b f^2$ (definición de integral), el volumen del sólido de revolución determinado por la función continua f será:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2}$$

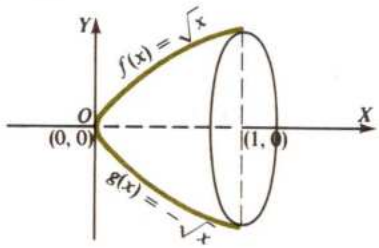
Ejemplo:

- Consideremos el recinto R limitado por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 1$. Despejando el valor de y en $y^2 = x$ obtenemos dos funciones: $f,g: [0, \infty] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$.

  Estas funciones tienen como gráfica la parte superior e inferior, respectivamente, de OX de la parábola. Las gráficas de f y g determinan el mismo sólido de revolución al girar alrededor de OX (Fig. 20). Por tanto, el volumen del sólido pedido es

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

A continuación generalizamos el resultado obtenido anteriormente calculando volúmenes que determinan al girar alrededor de OX recintos limitados por dos funciones continuas entre las abscisas $x = a$, $x = b$.

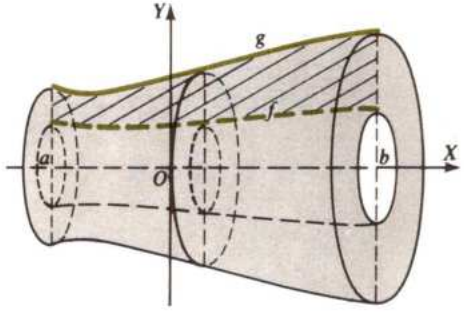


(Fig. 20)

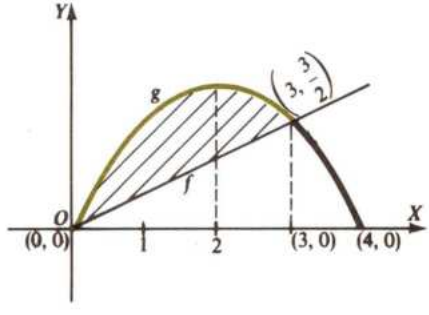
3.4. Sean $f,\ g\colon [a,\ b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,\ b]$ con la condición $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,\ b]$.

Si llamamos V_f, V_g a los volúmenes engendrados al girar alrededor de OX los recintos limitados por f y g, respectivamente, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$, el volumen del sólido determinado por el recinto limitado por f, g y las rectas $x = a$, $x = b$ al girar alrededor de OX será (Fig. 21):

$$V = V_g - V_f = \pi \int_a^b g^2 - \pi \int_a^b f^2 = \pi \int_a^b [g^2 - f^2]$$



(Fig. 21)



(Fig. 22)

Ejemplo:

- Las funciones $g(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2, f(x) = \frac{1}{2}x$ determinan un recinto plano (Fig. 22). Se verifica $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \forall \times \in [0, 3]$.

  El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar el recinto alrededor de OX es:

$$V = \pi \int_0^3 (g^2 - f^2) = \pi \int_0^3 \left[\left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right] dx = \pi \int_0^3 \left[\frac{1}{4}x^4 + 4x^2 - 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{15}{4}x^2 \right) dx = \pi \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{5}\pi$$

Ejercicios:

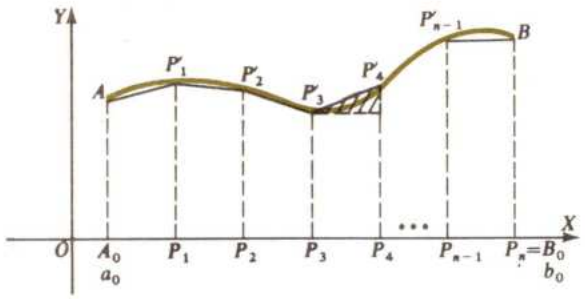
1. Calcular el volumen del sólido que engendra al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $f\colon [1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

2. Calcular el volumen de un cono de altura h y radio r.
3. Calcular el volumen de un tronco de cono de altura h y radio de las bases r y R.
4. El círculo de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ gira alrededor de la recta $x = x_0 (x_0 > r)$. ¿Qué forma tiene el sólido engendrado? Calcular su volumen.

4 LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA PLANA

4.1. Consideremos el arco de curva continua comprendido entre los puntos A y B de la figura 23.



(Fig. 23)

Si dividimos el intervalo $[a_0, b_0]$ en n partes iguales, obtenemos puntos $P_0 = A_0$, P_1, P_2, ..., $P_n = B_0$. Cada uno de estos puntos determina sobre la curva los puntos $P'_0 = A$, P'_1, P'_2, ..., $P'_n = B$.

Supongamos que las coordenadas de estos puntos son $P'_i = (x_i, y_i)$.

Estos puntos determinan una línea poligonal, inscrita en la curva. Como se observa en el triángulo rectángulo rayado en la figura, la longitud del segmento de poligonal comprendido entre P'_i y P'_{i+1} es, por el teorema de Pitágoras:

$$L_{P'_iP'_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

y, por tanto, la lontitud L_{AB} de la poligonal entre A y B será

$$L_{AB} = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

En general, si P y P' son particiones de $[a_0, b_0]$ y P es más fina que P', entonces $L^{P'}_{A.B} \leq L^{P}_{A.B}$, como justifica la figura 24.

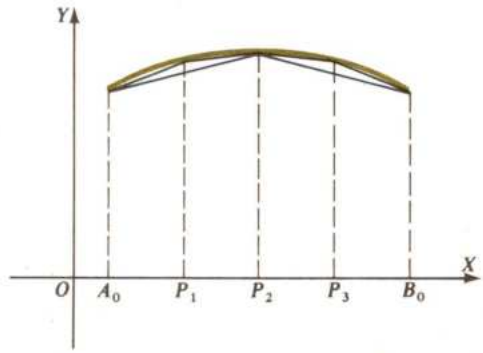
$$P = \{A_0, P_1, B_0\}$$

$$P' = \{A_0, P_2, P_1, P_3, B_0\}$$

Sin embargo, hay curvas que no verifican lo anterior, como, por ejemplo, la curva de ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

cuando $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.



(Fig. 24)

Una curva se dirá *rectificable* si existe $\sup L^P_{A.B}$, es decir, si *existe el supremo de las longitudes poligonales* $L^P_{A.B}$ cuando P recorre el conjunto de todas las particiones de $[a_0, b_0]$.

En este caso se define la longitud s del arco de curva entre $A(a_0, a_1)$ y $B(b_0, b_1)$ como dicho supremo.

Puede demostrarse que si A_0, B_0 son puntos de la curva de ecuación $y = f(x)$ y si f es derivable y su derivada continua en el intervalo $[a_0, b_0]$ determinado sobre el eje OX por A_0 y B_0, entonces la curva es rectificable y su longitud viene dada por

$$S = \int_{a_0}^{b_0} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Ejemplo:

- Hallar la longitud del arco de curva $y = x^{3/2}$ entre los puntos (0, 0) y (4, 8).

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}x^{1/2}\right]^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

(Hágase el cambio $1 + \frac{9}{4}x = t^2$)

4.2. Con frecuencia, en Cinemática, la posición de un móvil viene determinada por un par de funciones $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ que expresan las coordenadas del móvil en función del tiempo. En este caso la longitud recorrida por el móvil entre los instantes t_0 y t_1 viene dada por:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Si, en polares, la ecuación de una curva viene dada en coordenadas polares por $\rho = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, entonces:

$x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$; $y = \rho\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$;

y como $\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta$,

resulta: $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$.

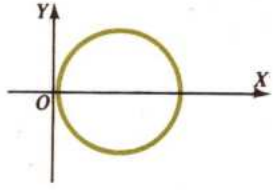
Ejemplos:

- Hallar la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 4$ por un móvil cuya posición viene dada por

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = t \;;\; \frac{dy}{dt} = (2t + 1)^{1/2} \qquad S = \int_0^4 \sqrt{t^2 + 2t + 1}\, dt = \int_0^4 (t + 1)\, dt = 12$$

• Hallar la longitud de la circunferencia de ecuación polar $\rho = 2a\,\text{sen}\theta$. La circunferencia es la indicada en la figura 25.



(Fig. 25)

Entonces: $S = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2\,\text{sen}^2\theta + 4a^2\cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} 2a\,d\theta = 4a\left[\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi a$

Ejercicios:

1. Hallar la longitud del arco de curva $9x^2 = 4y^3$ limitada por $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.
2. Hallar la longitud de un sector de circunferencia de radio r y amplitud θ.
3. Encontrar la longitud del arco de curva $y = 2x\sqrt{x} - 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$.
4. Encontrar la longitud de la hipocicloide cuyas ecuaciones polares son $x = 2\cos^3\theta$, $y = 2\,\text{sen}^3\theta$.
5. Hallar el espacio recorrido por un punto móvil entre $t = 0$ y $t = \dfrac{\pi}{2}$, sabiendo que su posición en cada instante está dada por:

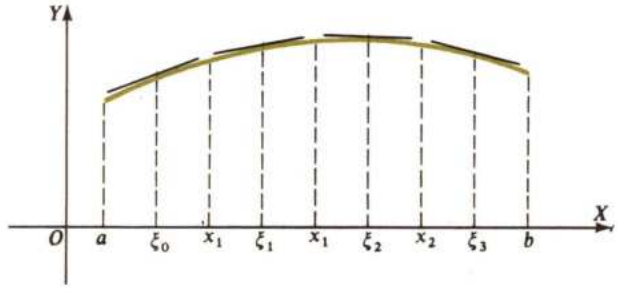
$$x = \cos t + t\,\text{sen}t$$

$$y = \text{sen}t - t\cos t$$

6. Las coordenadas de un punto móvil vienen dadas en el instante t por las ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$. Encontrar la longitud del espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 2$.

5 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y con derivada continua en $]a, b[$ cuya gráfica es la de la figura 26.

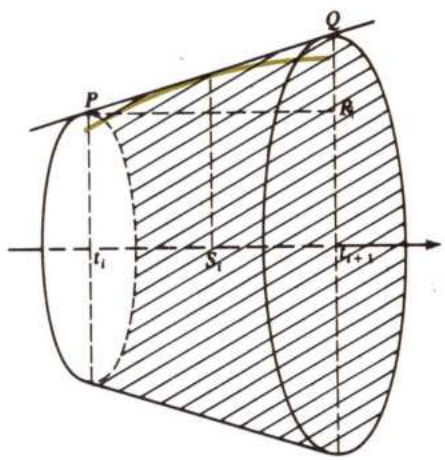


(Fig. 26)

Si la curva gira alrededor del eje OX, engendra un sólido cuyo volumen fue ya calculado en apartados anteriores. Nos proponemos ahora encontrar el área de dicho sólido.

Consideremos una partición de $[a, b]$, $\{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ y las tangentes a la curva en los puntos medios, ξ_i, de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de la partición.

Las coordenadas correspondientes a t_i y t_{i+1}, junto con el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y la tangente en ξ_i, determinan trapecios que al girar alrededor del eje OX determinan troncos de cono, como se indica en la figura 27.



(Fig. 27)

El área lateral del tronco de cono es igual al producto de la longitud de la circunferencia media por la generatriz PQ.

Se tiene entonces:

Longitud circunferencia media $= 2\pi f(\xi_i)$.

Para calcular la generatriz, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo $\widehat{PRQ}$.

La ecuación de la recta PQ es:

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Entonces, $PR = t_{i+1} - t_i$ y $QR = f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$. Luego la generatriz PQ vendrá dada por:

$$PQ = \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + [f'(\xi_i)]^2(t_{i+1} - t_i)^2} = (t_{i+1} - t_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}$$

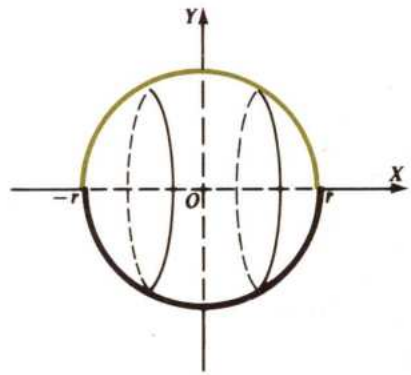
Resulta que el área del tronco de cono es $S_i = 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}(t_{i+1} - t_i)$ y el área total será $S = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}(t_{i+1} - t_i)$.

El área buscada es entonces el límite de las áreas S de los trapecios cuando la longitud de los intervalos de la partición tiende a cero. Este límite es $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Ejemplos:

- *Area de la esfera*

  Una esfera se puede considerar como el sólido engendrado al girar la semicircunferencia de ecuación $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}(-r \leq x \leq r)$ alrededor del eje OX (Fig. 28).



(Fig. 28)

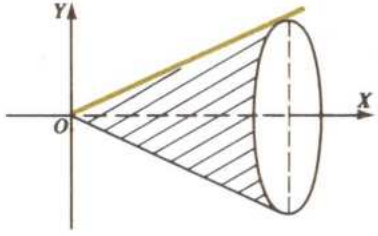
  Entonces:

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx =$$

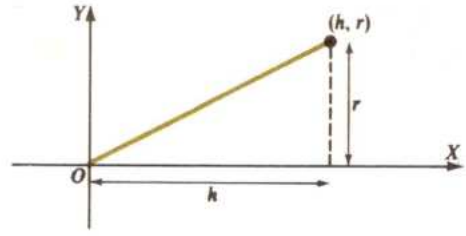
$$= 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

• *Area lateral de un cono recto*

Un cono recto puede considerarse como el sólido engendrado por una recta que gira alrededor del eje OX como se indica en la figura 29.



(Fig. 29)



(Fig. 30)

Si h es la longitud de la altura y r el radio de la base, la ecuación de la recta generatriz es $y = \frac{r}{h}x$ (Fig. 30). Entonces:

$$S = 2\pi\int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx = \frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{r^2+h^2}\int_0^h x\,dx =$$

$$= \frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{r^2+h^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{r^2+h^2}$ es la generatriz g, resulta $S = \pi rg$.

Ejercicios:

1. La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ gira alrededor de la recta $y = -2$. Hallar el área de la superficie engendrada.
2. Encontrar el área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.
3. Encontrar el área lateral de un cilindro de radio r y altura h.
4. Un punto describe una curva de ecuación $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$. Encontrar la superficie determinada por su trayectoria al girar alrededor del eje OX.

6 MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE UNA PARTÍCULA

6.1. Supongamos que se conoce la aceleración $a = a(t)$ en función del tiempo de una partícula que se mueve en línea recta. Como la aceleración es la derivada de la velocidad en función del tiempo, ésta es una primitiva de la aceleración. Así:

$$v'(t) = a(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t)\,dt$$

Análogamente el espacio recorrido por la partícula es una primitiva de la velocidad de la partícula que suponemos también función del tiempo:

$$x'(t) = v(t) \Rightarrow x(t) = \int v(t)\, dt$$

Los incrementos de velocidad y espacio recorrido (desplazamiento) entre los instantes t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ vienen dados por:

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

Ejemplo:

- Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración dada por la expresión $a = 1 + t$. Calculemos las fórmulas de la velocidad y espacio recorrido en función del tiempo:

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int (1 + t)\, dt = t + \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int \left(t + \frac{1}{2}t^2 + C\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + Ct + C'$$

Desde el punto de vista físico es costumbre dar un significado a las constantes de integración. Si denotamos por v_0 la velocidad en el instante $t = 0$ (velocidad inicial) se obtiene $C = v_0$. Si x_0 es la posición inicial de la partícula (instante $t = 0$) tenemos $C' = x_0$. Las ecuaciones nos quedan:

$$v = v_0 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$$

Si $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, la velocidad del móvil en el instante $t = 1$ es, suponiendo la aceleración dada en m/seg^2:

$$V = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,\text{m/seg}$$

y el espacio recorrido

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3 + 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}m$$

Los incrementos de velocidad y espacios recorridos por la partícula entre los instantes $t = 1$ y $t = 3$ son $(x_0 = 0,\ v_0 = 0)$:

$$v(3) - v(1) = \int_1^3 (1 + t)\, dt = \left[t + \frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = 6\,\text{m/seg}$$

$$x(3) - x(1) = \int_1^3 \left(t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right]_1^3 = \frac{25}{3}\,\text{m}$$

6.2. Un tipo de movimiento rectilíneo acelerado muy sencillo es aquel que presenta una aceleración constante a. Se llama movimiento uniformemente acelerado, y la velocidad vendrá dada:

$$v = \int a\,dt = at + C = at + v_0$$

El espacio recorrido

$$x = \int (v_0 + at)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Ejemplo:

- Un caso particular de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado lo tenemos en un cuerpo que cae a tierra. Si despreciamos el efecto de la resistencia del aire y la variación de la aceleración con la altura (caída libre), ésta permanece constante. Se llama aceleración debida a la gravedad y vale, aproximadamente, $g = 9{,}8\ \text{m/seg}^2$. Las ecuaciones del espacio recorrido y velocidad en una caída libre son (en metros y metros/seg, respectivamente):

$$x = x_0 + v_0 t + 4{,}9t^2$$

$$v = v_0 + 9{,}8t$$

Ejercicios:

1. La aceleración de un cuerpo suspendido de un resorte viene dada por $a = -\text{sen}t$. Calcular las ecuaciones del espacio y de la velocidad en función del tiempo.
2. Se abandona un cuerpo en caída libre partiendo del reposo ($v_0 = 0$). Calcular:
   a) Su velocidad al cabo de 2 seg.
   b) El espacio recorrido al cabo de 3 seg.
   c) Incremento de la velocidad entre los instantes $t = 2$ y $t = 3$.
3. El tiempo de reacción del conductor medio de automóvil es de unos 0,7 seg (se denomina así al tiempo que transcurre entre la percepción de una señal para detenerse y la aplicación de los frenos). Si un automóvil puede decelerar a razón de 5 m/seg^2 ($a = -5\ \text{m/seg}^2$), calcular la distancia total recorrida hasta detenerse después de observar la señal: a) Si $v = 60$ km/hora; b) Si $v = 100$ km/hora.
4. En el problema anterior, si la velocidad del vehículo es de 100 km/hora, ¿cuál es la velocidad del vehículo al cabo de 1 seg de haber frenado?

7 TRABAJO DE UNA FUERZA

En Física se dice que se realiza un trabajo cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo y al mismo tiempo éste se desplaza. Por ejemplo: el levantamiento de un peso, el alargamiento (o compresión) de un muelle, etc.

Supongamos una partícula de cierta masa que se mueve en línea recta y está sometida a una fuerza F en el mismo sentido que la trayectoria de la partícula. Si $F = F(x)$ es una función del espacio recorrido por la partícula, se define el trabajo realizado por F entre los puntos $x = a$, $x = b$ de la trayectoria al valor

$$W_a^b = \int_a^b F(x)\,dx$$

Físicamente, el trabajo se da en unidades de trabajo (UT), dependiendo éstas del sistema de unidades que se utilice.

Ejemplos:

- Si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante, el trabajo realizado entre $x = a$ y $x = b$ viene dado

$$W_a^b = \int_a^b F\,dx = F\int_a^b dx = F(b - a)$$

- Entre ciertos límites, la fuerza necesaria para alargar un resorte viene dada por la función $F(x) = kx$, donde x es el alargamiento y k una constante llamada *constante de rigidez del resorte*. El trabajo necesario para alargarlo una longitud b viene dado por

$$W_0^b = \int_0^b kx\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{kb^2}{2}\ \text{UT}$$

Ejercicios:

1. Calcular la constante de rigidez de un muelle si el trabajo que realizamos para estirarlo 2 m son 150 UT.

2. Supongamos que una partícula se desplaza a lo largo del eje OX mediante una fuerza impulsora dada la función $F(x) = 3x^2 + 2$. Calcular el trabajo necesario para desplazar esta partícula desde el punto $x = 1$ hasta $x = 2$.

EJERCICIOS FINALES

1. Calcular el área del recinto que determina la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.
2. Calcular el área que determina la parábola $x = 6 - 3y^2$ con el eje OY.
3. Calcular el área comprendida entre la recta $y + x = 2$ y la parábola $y^2 = x$.
4. Hallar el área determinada por el eje OX y la curva $y = x^4 - 2x^2$.
5. Encontrar el área del recinto limitado por las curvas $y = x^4 - 2x^2$ e $y = 2x^2$.
6. El área limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 6$ está dividida en dos regiones de igual área por la recta $y = a$. Encontrar a.
7. Hallar la porción de área común a los círculos de ecuaciones polares $\rho = 2\cos\theta$ y $\rho = 2\operatorname{sen}\theta$.
8. Hallar el área de la lemniscata de ecuación $\rho^2 = 4\cos 2\theta$.
9. Calcular el volumen de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ x^2 - 7 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

10. Calcular el volumen de revolución que determina la parábola $y^2 = x$ al girar alrededor de OX entre las abscisas $x = 0$, $x = 2$.
11. Calcular el volumen del sólido de revolución que determina el recinto que limitan las funciones $y = 6$, $y = 4x - x^2$, $x = 0$, $x = 4$.
12. Hallar la longitud del arco de curva de ecuaciones $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = 0$ y $x = 3$.
13. La posición de un punto móvil está dada en el instante t por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{3}(2t + 3)^{3/2}$$

$$y = \frac{t^2}{2} + t$$

Hallar la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 4$.

14. Encontrar el área de la superficie engendrada por la curva $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$ al girar alrededor de la recta $y = -1$ desde $x = 1$ a $x = 3$.
15. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada al girar una semionda de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje OX.
16. Una pelota rueda, partiendo del reposo, sobre un plano inclinado, tardando 5 seg en recorrer una distancia de 1 m. ¿Cuál es su aceleración? ¿Cuántos metros descendería verticalmente en el mismo tiempo?
17. Una fuerza impulsora dada por $F(x) = x - 5$ realiza un trabajo de 8 UT para desplazar una partícula una distancia b a lo largo de OX. ¿Cuál es el valor de la distancia b?
18. Una partícula se mueve a lo largo de OX mediante una fuerza impulsora dada por $F(x) = ax + b$. Calcular a y b sabiendo que se necesitan 100 UT para desplazar la partícula 10 unidades a partir del origen y 50 UT para desplazarla 6 unidades a partir del origen.

TEMA 23 INTERPOLACIÓN

En este tema se construye el polinomio de interpolación para $n + 1$ puntos por los dos métodos clásicos: el de Lagrange y el de Newton. Este último se utiliza en el caso de que las abscisas de los puntos conocidos estén en progresión aritmética.

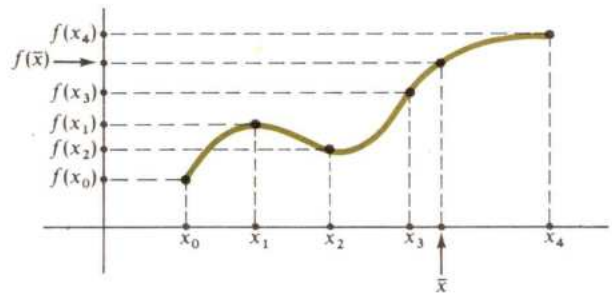
1 EL PROBLEMA DE LA INTERPOLACIÓN

Muchas veces se dispone de una tabla de valores de una función correspondiente a un conjunto de abscisas:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

En la práctica se plantea el siguiente problema: *Calcular el valor de $f(\bar{x})$ correspondiente a un $\bar{x}$ intermedio de los que disponemos.* Es lo que se denomina *interpolación.*

Si representamos los puntos $(x, f(x))$ de la tabla y unimos éstos por una curva, podemos determinar gráficamente el valor de f para $\bar{x}$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

Evidentemente, el valor $f(\bar{x})$ dependerá de la curva que tracemos. Si los puntos están «suficientemente» próximos, $f(\bar{x})$ se aproximará a su valor real. Este es un procedimiento gráfico de interpolación que, con todas sus inexactitudes, puede resultar práctico en algunos casos, dada su simplicidad.

A continuación estudiaremos dos métodos analíticos de interpolación: el de *Lagrange* y el de *Newton. Ambos coinciden en calcular una función polinómica que pase por los puntos del plano determinados por una tabla de valores de una función f en determinadas abscisas.* Calculada la función polinómica (polinomio de interpolación), los valores de f para abscisas intermedias a las dadas se calculan mediante el *polinomio de interpolación.*

2 MÉTODO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

2.1. Supongamos que conocemos tres valores de una función f:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

y que los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ no están alineados; entonces *existe una única función polinómica de segundo grado que pasa por los tres puntos.* En efecto:

Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es dicha función, se tiene:

$$P(x_0) = f(x_0); \quad P(x_1) = f(x_1); \quad P(x_2) = f(x_2)$$

igualdades que nos llevan al sistema

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

que es compatible y determinado, ya que el determinante de la matriz del sistema (determinante de Vandermonde):

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) \neq 0$$

puesto que los números x_0, x_1, x_2 son distintos.

Resolviendo el sistema, obtenemos los valores de a_0, a_1, a_2. El polinomio así obtenido es el *polinomio de interpolación de segundo grado.*

Ejemplo:

- Consideremos la siguiente tabla de valores de una función:

x	1	2	3
$f(x)$	3	0	3

Vamos a calcular el polinomio de interpolación de segundo grado $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$P(1) = 3 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$P(2) = 0 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$
$$P(3) = 3 = a_0 + 3a_2 + 9a_2$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer se tiene:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}} = 12; \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}} = -12; \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}} = 3$$

Por lo tanto, $P(x) = 12 - 12x + 3x^2$

Mediante $P(x)$ podemos calcular valores de $f(x)$ para abscisas intermedias. Según $P(x)$, el valor de la función en $x = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, es:

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 12 - 12 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{9}{4} = 12 - 18 + \frac{27}{4} = \frac{3}{4}$$

2.2. Generalizando el resultado de **2.1**, *si disponemos de $n + 1$ valores de una función:*

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

existe una única función polinómica de grado $\leq n$ que pasa por los puntos del plano $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$. La forma de determinar esa función polinómica

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

es imponiéndole la condición de que pase por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$. Se obtiene así un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ que es compatible y determinado.

Esta forma de calcular el polinomio de interpolación es muy laboriosa. A continuación calcularemos el polinomio por el método de Lagrange.

2.3. Consideremos tres valores de una función f:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

de tal forma que los puntos del plano $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ no estén alineados.

La función

$$f_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

verifica:

a) f_0 es una función polinómica de grado 2.
b) $f_0(x_0) = 1$.
c) $f_0(x_1) = f_0(x_2) = 0$

Análogamente, las funciones

$$f_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)};$$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

son funciones polinómicas de segundo grado que verifican:

$$f_1(x_1) = 1; \quad f_1(x_0) = f_1(x_2) = 0$$

$$f_2(x_2) = 1; \quad f_2(x_0) = f_2(x_1) = 0$$

Por tanto, la función polinómica de grado 2

$$P(x) = f(x_0)f_0(x) + f(x_1)f_1(x) + f(x_2)f_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$

$$+ f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

es el polinomio interpolador de grado 2 que buscábamos, ya que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, como es inmediato comprobar, y se llama *polinomio interpolador de Lagrange para tres puntos*. Si los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ estuvieran alineados, $P(x)$ sería una recta.

2.4. Supongamos que conocemos $n + 1$ valores de una función f:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Las funciones

$$f_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}; \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots n$$

verifican las siguientes condiciones:

a) f_i es una función polinómica de grado n.

b) $f_i(x_i) = 1$.

c) $f_i(x_0) = f_i(x_1) = \cdots = f_i(x_{i-1}) = f_i(x_{i+1}) = \cdots = f_i(x_n) = 0$.

La función polinómica $P(x) = f(x_0)f_0(x) + f(x_1)f_1(x) + \cdots + f(x_n)f_n(x)$ es de grado n y además pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$. Es, por tanto, el polinomio interpolador de grado $\leq n$, llamado *polinomio de interpolación de Lagrange para $n + 1$ puntos*.

Ejemplos:

- Escribamos el polinomio interpolador de Lagrange para cuatro puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$.

$$f_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$f_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$f_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

El polinomio buscado es:

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$
$$+ f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_3)\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

- Dados los valores de una función f:

x	-2	-1	1
$f(x)$	3	1	2

calculemos el polinomio de interpolación de grado 2

$$f_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(-2 + 1)(-2 - 1)} = \frac{x^2 - 1}{3}$$

$$f_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(-1 + 2)(-1 - 1)} = \frac{x^2 + x - 2}{-2}$$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(1 + 2)(1 + 1)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{6}$$

$$P(x) = f(x_0)f_0(x) + f(x_1)f_1(x) + f(x_2)f_2(x) = 3\frac{x^2 - 1}{3} + 1\frac{x^2 + x - 2}{-2} +$$
$$+ 2\frac{x^2 + 3x + 2}{6} = x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$$

$$P(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

Obsérvese que pasa por los puntos $(-2, 3)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$.

El valor de f en $x = \frac{1}{2}$ lo obtenemos:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{24} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{27}{24}$$

Ejercicios:

1. Calcular el polinomio de interpolación para la tabla de valores

x	-1	$-0{,}75$	0	$0{,}5$
$f(x)$	2	$1{,}75$	1	$0{,}95$

   Calcular $f(0{,}25)$

2. Calcular un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga por raíces $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x = 1$ y que el valor numérico para $x = 5$ sea 1.
3. Determinar un polinomio de segundo grado $g(x)$ que verifique: $g(0) = 2$, $g(-1) = 5$, $g(2) = 3$.
4. Calcular mediante interpolación $f(2)$, sabiendo que $f(1{,}75) = 3$, $f(2{,}5) = 1$, $f(3) = 0$.

3 MÉTODO DE NEWTON

Otro procedimiento para calcular el polinomio de interpolación es el de Newton, que expondremos en este apartado. Se utilizará en los casos en que las abscisas, para las cuales conocemos el valor de la función, estén en progresión aritmética.

3.1. Supongamos que disponemos de una tabla de valores de una función f.

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0);\ \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1);\ \ldots;\ \Delta f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

Estos valores se llaman *diferencias primeras de f.*

Análogamente se obtienen las diferencias segundas:

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0);\ \Delta^2 f(x_1) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1);\ \ldots;\ \Delta^2 f(x_{n-2}) = \\ = \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2})$$

En general, las diferencias p-ésimas de f se obtienen:

$$\Delta^p f(x_i) = \Delta^{p-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{p-1} f(x_i)$$

A continuación veremos que conociendo los valores $f(x_0)$, $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0), \ldots, \Delta^k f(x_0)$, conocemos $f(x_k)$. En efecto:

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f(x_0)$$
$$f(x_2) = f(x_1) + \Delta f(x_1) = f(x_0) + \Delta f(x_0) + \Delta f(x_1)$$

Como $\Delta f(x_1) = \Delta^2 f(x_0) + \Delta f(x_0)$, resulta:

$$f(x_2) = f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$
$$f(x_3) = f(x_2) + \Delta f(x_2) = [f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)] + [\Delta^2 f(x_1) + \Delta f(x_1)]$$

Como $\Delta^2 f(x_1) = \Delta^3 f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$,

$$f(x_3) = [f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)] + [\Delta^3 f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)] + [\Delta^2 f(x_0) + \Delta f(x_0)] \Rightarrow$$
$$f(x_3) = f(x_0) + 3\Delta f(x_0) + 3\Delta^2 f(x_0) + \Delta^3 f(x_0)$$

Esta última expresión se puede escribir en la forma:

$$f(x_3) = \binom{3}{0} f(x_0) + \binom{3}{1}\Delta f(x_0) + \binom{3}{2}\Delta^2 f(x_0) + \binom{3}{3}\Delta^3 f(x_0)$$

En general, se tendrá:

$$f(x_k) = \binom{k}{0} f(x_0) + \binom{k}{1}\Delta f(x_0) + \binom{k}{2}\Delta^2 f(x_0) + \cdots + \binom{k}{k-1}\Delta^{k-1} f(x_0) + \binom{k}{k}\Delta^k f(x_0)$$

De forma abreviada

$$\boxed{f(x_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i f(x_0)} \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad [1]$$

Ejemplos:

- Sabiendo que $f(x_0) = 5$, $\Delta f(x_0) = 3$, $\Delta^2 f(x_0) = -1$, $\Delta^3 f(x_0) = 0$, calcular $f(x_3)$.

$$f(x_3) = \binom{3}{0} f(x_0) + \binom{3}{1} \Delta f(x_0) + \binom{3}{2} \Delta^2 f(x_0) + \binom{3}{3} \Delta^3 f(x_0) = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 3(-1) + 1 \cdot 0 = 11$$

- Calcular las diferencias sucesivas (hasta el orden 3) de los valores de una función f dados por la tabla

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	1	2	0

$$\Delta f(1) = f(2) - f(1) = 1 - 5 = -4$$
$$\Delta f(2) = f(3) - f(2) = 2 - 1 = 1$$
$$\Delta f(3) = f(4) - f(3) = 0 - 2 = -2$$
$$\Delta^2 f(1) = \Delta f(2) - \Delta f(1) = 1 - (-4) = 5$$
$$\Delta^2 f(2) = \Delta f(3) - \Delta f(2) = -2 - 1 = -3$$
$$\Delta^3 f(1) = \Delta^2 f(2) - \Delta^2 f(1) = -3 - 5 = -8$$

Estos datos se ordenan en la siguiente tabla:

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	1	2	0
$\Delta f(x)$	-4	1	-2	
$\Delta^2 f(x)$	5	-3		
$\Delta^3 f(x)$	-8			

Observemos que las sucesivas filas de la tabla se van obteniendo partiendo de los valores de f (segunda fila), según el siguiente esquema:

a	b
$b-a$	

3.2. Supongamos que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se encuentran en progresión aritmética.

$$x_1 = x_0 + h;\ x_2 = x_1 + h;\ \ldots;\ x_i = x_{i-1} + h;\ \ldots;\ x_n = x_{n-1} + h$$

Se verifica:

$$x_n = x_0 + nh \Rightarrow n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

$$x_n = x_1 + (n-1)h \Rightarrow n - 1 = \frac{x_n - x_1}{h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_i + (n-i)h \Rightarrow n - i = \frac{x_n - x_i}{h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_{n-1} + h \Rightarrow 1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{h}$$

Por [1] de **3.1**:

$$f(x_n) = \binom{n}{0} f(x_0) + \binom{n}{1} \Delta f(x_0) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(x_0) + \binom{n}{3} \Delta^3 f(x_0) + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^n f(x_0) =$$

$$= f(x_0) + n\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 f(x_0) + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!} \Delta^n f(x_0) \Rightarrow f(x_n) = f(x_0) + \frac{x_n - x_0}{h} \Delta f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_1)}{2h^2} \Delta^2 f(x_0) + \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)}{3!h^3} \Delta^3 f(x_0) + \cdots +$$

$$+ \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}{n!h^n} \Delta^n f(x_0)$$

Sustituyendo en esta última expresión x_n por x obtenemos un polinomio de grado n llamado *polinomio de interpolación de Newton:*

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0) + \cdots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f(x_0)$$

Observemos que la función polinómica $P(x)$ pasa por los puntos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$$

Ejemplos:

- Calcular el polinomio de interpolación de Newton para los valores:

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	1	2	0

Como tenemos cuatro valores de la función, el polinomio será de grado menor o igual que 3.

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0)$$

En nuestro caso, $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $h = 1$.

Hay que calcular $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$, $\Delta^3 f(x_0)$. Estos valores corresponden a los tres últimos valores de la primera columna de la tabla ya obtenida anteriormente, que ponemos a continuación:

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	1	2	0
$\Delta f(x)$	-4	1	-2	
$\Delta^2 f(x)$	5	-3		
$\Delta^3 f(x)$	-8			

El polinomio nos queda:

$$P(x) = 5 + \frac{x - 1}{1}(-4) + \frac{(x - 1)(x - 2)}{2 \cdot 1} \cdot 5 +$$

$$+ \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{3! \cdot 1}(-8) =$$

$$= 5 - 4(x - 1) + \frac{5}{2}(x - 1)(x - 2) - \frac{8}{6}(x - 1)(x - 3) =$$

$$= 5 - 4(x - 1) + \frac{5}{2}(x^2 - 3x + 2) - \frac{4}{3}(x^3 - 6x^2 - 11x - 6) =$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{157}{6}x + 22$$

Se comprueba inmediatamente que $P(x)$ pasa por los puntos (1, 5), (2, 1), (3, 2), (4, 0).

Mediante $P(x)$ se calculan, de forma aproximada, valores de f para puntos intermedios comprendidos entre 1 y 4.

• Calcular el polinomio de interpolación de Newton para la tabla de valores:

x	-3	-1	1	3	5
$f(x)$	0	-1	-5	-4	-2
$\Delta f(x)$	-1	-4	1	2	
$\Delta^2 f(x)$	-3	5	1		
$\Delta^3 f(x)$	8	-4			
$\Delta^4 f(x)$	-12				

El polinomio será:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{4!h^4}\Delta^4 f(x_0)$$

Aquí: $x_0 = -3$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$; $x_4 = 5$; $h = 2$.

Los valores $f(x_0)$, $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$, $\Delta^3 f(x_0)$, $\Delta^4 f(x_0)$ corresponden, como antes, a la primera columna de la tabla. Sustituyendo:

$$P(x) = 0 + \frac{x + 3}{2}\cdot(-1) + \frac{(x + 3)(x + 1)}{2 \cdot 2^2}\cdot(-3) + \frac{(x + 3)(x + 1)(x - 1)}{3!2^3}\cdot 8 +$$

$$+ \frac{(x - 3)(x + 1)(x - 1)(x - 3)}{4!2^4}(-12)$$

$$P(x) = -\frac{x + 3}{2} - \frac{3}{8}(x + 3)(x + 1) + \frac{1}{6}(x + 3)(x + 1)(x - 1) - \frac{1}{32}(x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 3)$$

El valor de $f(0)$ será $P(0) = -\frac{109}{32}$.

Ejercicios:

1. Dada la tabla de valores de una función f:

x	2,5	4	5,5	7
$f(x)$	$-0,5$	$-0,25$	0,1	0,3

calcular las diferencias sucesivas.

2. Sabiendo que $f(x_0) = 0,2$, $\Delta f(x_0) = 0,31$, $\Delta^2 f(x_0) = 0,5$, $\Delta^3 f(x_0) = 1$, $\Delta^4 f(x_0) = 1,5$, $\Delta^5 f(x_0) = 1,75$, calcular $f(x_5)$.

3. Calcular el polinomio de interpolación de Newton para la tabla de valores del ejercicio 1. ¿Cuál es el valor de la función para $x = -2,75$?

4. Calcular el polinomio de interpolación de Newton para los valores:

x	0	2	4	6
$f(x)$	0,25	0,60	0,90	1

5. Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange para la tabla anterior y comprobar que coincide con el de Newton.

EJERCICIOS FINALES

1. Calcular el polinomio de interpolación para la tabla de valores:

x	0,7	1	1,5	1,75
$f(x)$	$-0,1$	0,2	0,3	0,25

¿Cuál es el valor aproximado de $f(0,8)$ y $f(1,25)$?

2. Los valores de solubilidad del nitrato de bario en agua a distintas temperaturas son los siguientes:

Temperatura	0°	10°	20°	30°
Solubilidad	5	7	9,2	11,6

¿Cuál es el valor de la solubilidad a 5°? ¿Y a 12°?

3. Disponiendo de $n + 1$ valores para cada una de dos funciones f y g:

$$f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n); \quad g(x_0), g(x_1), \ldots g(x_n)$$

Demostrar:

a) $\Delta(f + g)(x_i) = \Delta f(x_i) + \Delta g(x_i)$; b) $\Delta(af)(x_i) = a\Delta f(x_i)$

4. Sabiendo que sen20° = 0,3420, sen21° = 0,3584, sen22° = 0,3746, sen23° = 0,3905, calcular: sen20°30′ y sen22°10′.

5. Sabiendo que log3 = 0,4771, log3,5 = 0,5441, log4 = 0,6021, calcular log3,75 y log3,1.

6. En una determinada población, la probabilidad de que los individuos tengan cierta talla viene dada por la tabla:

Talla (en metros)	1,60	1,65	1,70	1,75
Probabilidad	0,22	0,37	0,15	0,02

Calcular la probabilidad de que un individuo mida 1,68 m.

7. Calcular cos20,5°, sabiendo que cos15° = 0,9659, cos18° = 0,9511, cos21° = 0,9336.

LAGRANGE (Louis)

Matemático y astrónomo franco-italiano (1736-1813). Lagrange aplicó su reconocida habilidad matemática a la sistematización de la mecánica, deduciendo, mediante el análisis de las variaciones, ecuaciones muy generales con las que se podía resolver la mayor parte de los problemas de la mecánica.

Los métodos geométricos de comprobación que utilizaron Galileo y Newton fueron sustituidos por Lagrange por métodos algebraicos, obteniendo de este modo importantes resultados.

TEMA 24 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El teorema fundamental del cálculo permite calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ *conociendo una primitiva* $F(x)$ *de* $f(x)$. *Efectivamente, la regla de Barrow nos dice:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ahora bien, las funciones que aparecen en la vida real, en su mayor parte, no *tienen primitivas fácilmente calculables. Otras veces ni conocemos la expresión analítica de dichas funciones.*

Este tema se dedica a los métodos elementales del cálculo aproximado de integrales: el de los trapecios y el de Simpson. La idea es muy simple. Se aproxima el integrando por otra función más sencilla cuya integral es de fácil cálculo. Los dos métodos anteriormente citados de integración numérica se diferencian en el tipo de función que se utiliza para aproximar el integrando. Uno aproxima el integrando por una poligonal (método de los trapecios); en cambio, con el método de Simpson la aproximación se realiza por arcos de parábola.

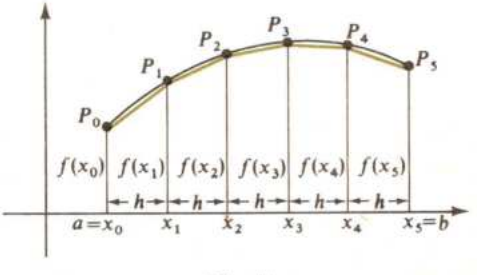
1 MÉTODO DE LOS TRAPECIOS

El método de los trapecios consiste en aproximar arcos de la curva $f(x)$ por segmentos de recta. Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX, $x = a$ y $x = b$. Esta área se aproxima por una suma de áreas de trapecios que son fácilmente calculables. De ahí el nombre de método de los trapecios.

1.1. Consideremos una función $f = [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, integrable en $[a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $x_i - x_{i-1} = h$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. P divide a $[a, b]$ en n partes iguales. La longitud de cada subintervalo

$$[x_{i-1}, x_i] \text{ es } h = \frac{b-a}{n}.$$

Esta partición determina n trapecios cuyas bases tienen de longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

El área que determinan estos trapecios es:

$$S = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} h + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} h =$$

$$= h\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right] =$$

$$= h\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Aproximando $\int_a^b f(x)\,dx$ por S nos queda:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

que es la fórmula de los trapecios.

Si llamamos $P(x)$ a la función cuya gráfica son los segmentos

$$\overline{P_0P_1},\ \overline{P_1P_2},\ \overline{P_2P_3},\ \ldots,\ \overline{P_{n-1}P_n} \text{ (poligonal),}$$

S es el valor de $\int_a^b P(x)\,dx$. Observemos que $\int_a^b P(x)\,dx$ tiene sentido, pues $P(x)$ es continua en $[a, b]$. Así, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P(x)\,dx$$

Evidentemente, la aproximación será mejor cuanto menor sea el valor de h, lo que es equivalente a decir que la aproximación se mejora cuanto mayor sea el valor de n.

La fórmula de los trapecios es válida aun cuando la función no esté restringida a la condición $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Ejemplo:

- Calculemos un valor aproximado de

$$L7 = \int_1^7 \frac{1}{x}\,dx$$

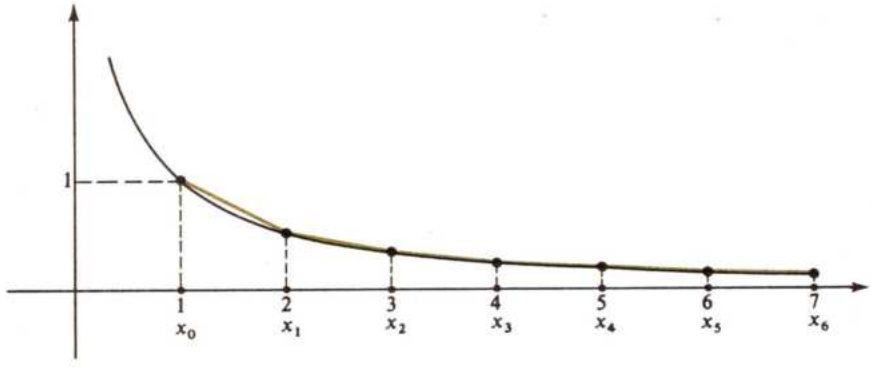
Aquí f es la función

$$f: [1, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

Dividiremos el intervalo [1, 7] en partes iguales. La partición que lo divide es:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

La figura 2 muestra gráficamente la aproximación de $\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx$ que se va a realizar:



(Fig. 2)

$$\int_1^7 f(x)\,dx \simeq h\left[\frac{f(x_0)+f(x_6)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\right] =$$

$$= 1\left[\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{7}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} =$$

$$= 0{,}500 + 0{,}071 + 0{,}500 + 0{,}333 + 0{,}250 + 0{,}200 + 0{,}166 = 2{,}020$$

Si dividimos el intervalo [1, 7] en 12 partes, la fórmula de los trapecios nos quedaría:

$$\int_1^7 f(x)\,dx = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_{12})}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \right.$$

$$\left. + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9) + f(x_{10}) + f(x_{11})\right]$$

donde:

$$h = 0{,}5,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2{,}5,\ x_4 = 3,\ x_5 = 3{,}5,\ x_6 = 4,$$
$$x_7 = 4{,}5,\ x_8 = 5,\ x_9 = 5{,}5,\ x_{10} = 6,\ x_{11} = 6{,}5,\ x_{12} = 7$$

Así:

$$\int_1^7 f(x)\,dx \simeq 0{,}5\left[\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{7}}{2} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3{,}5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4{,}5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5{,}5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6{,}5}\right] =$$

$$= 0{,}5[0{,}500 + 0{,}071 + 0{,}666 + 0{,}500 + 0{,}400 + 0{,}333 + 0{,}285 + 0{,}250 + 0{,}222 +$$
$$+ 0{,}200 + 0{,}181 + 0{,}166 + 0{,}153] = 0{,}5 \cdot 3{,}927 = 1{,}9635$$

que es una aproximación de $\int_1^7 f(x)\,dx$ mejor que la anterior.

Ejercicios:

1. Calcular un valor aproximado de $L2$ por el método de los trapecios.
2. Calcular un valor aproximado de las siguientes integrales por el método de los trapecios.

   a) $\int_2^3 \frac{dx}{1+x}$; b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$; c) $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. Dada la siguiente tabla de valores de una función f:

x	0	0,25	0,50	0,75	1	1,25	1,50
$f(x)$	0,001	0,200	0,300	0,312	0,215	0,200	0,195

   calcular, por el método de los trapecios, un valor aproximado de

$$\int_0^{1,5} f(x)\,dx$$

2 MÉTODO DE SIMPSON

Este método de integración aproximada se diferencia del anterior en que la aproximación de arcos de curva del integrando $f(x)$ se hace por arcos de parábola en vez de por segmentos de recta.

2.1. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Consideremos el punto medio de $[a, b]$, $m = \frac{a+b}{2}$. Existe una única función polinómica de grado ≤ 2,

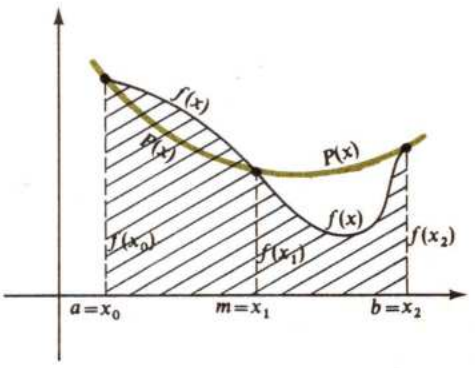
$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

que pasa por los puntos

$$(a, f(a)),\ (m, f(m)),\ (b, f(b))$$

Tomamos como aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ el valor de la integral $\int_a^b P(x)\,dx$.

Si $f(x) \geq 0$, aproximamos el área del recinto limitado por f, OX y las rectas $x = a$, $x = b$, por el área del recinto que determinan $P(x)$, OX y las rectas $x = a$, $x = b$ (Fig. 3).



(Fig. 3)

Calculemos $\int_a^b P(x)\,dx$. Para simplificar los cálculos supongamos $a = -h$, $m = 0$, $b = h$.

$$\int_a^b P(x)\,dx = \int_{-h}^{h} (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,dx = a_2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-h}^{h} + a_1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-h}^{h} + a_0\Big[x\Big]_{-h}^{h} =$$

$$= a_2\frac{2h^3}{3} + a_0 2h \quad [1]$$

Determinemos ahora los coeficientes a_2, a_0. Para ello utilizamos la fórmula de interpolación de Newton, dado que las abscisas $x_0 = a$, $x_1 = m$, $x_2 = b$ están en progresión aritmética de razón $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$. El polinomio de Newton para los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ es

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

Efectuando los cálculos en la tabla:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
$\Delta f(x)$	$f(x_1) - f(x_0)$	$f(x_2) - f(x_1)$	
$\Delta^2 f(x)$	$f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)$		

El polinomio de interpolación nos queda:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}(f(x_1) - f(x_0)) + \cdot$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}(f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1))$$

Igualando coeficientes con $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, obtenemos:

$$a_2 = \frac{f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)}{2h^2}$$

$$a_0 = f(x_0) - \frac{x_0}{h}(f(x_1) - f(x_0)) + \frac{x_0x_1}{2h^2}(f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1))$$

como $x_0 = -h$, $x_1 = 0 \Rightarrow a_0 = f(x_1)$.

Sustituyendo en [1] resulta:

$$\int_a^b P(x)\,dx = \frac{2h^3}{3}\left(\frac{f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)}{2h^2}\right) + 2hf(x_1) =$$

$$= \frac{h}{3}(f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)) + 2hf(x_1) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

que es una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$. Así, tenemos:

$$\int_b^a f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

que es *la fórmula de Simpson para tres valores conocidos de la función f: $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.*

2.2. Supongamos $[a, b]$ dividido en n partes iguales, siendo n par.

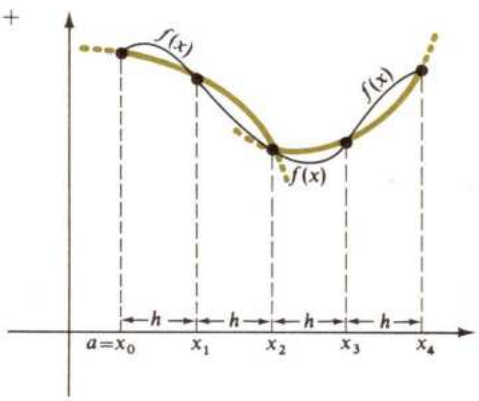
Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (Fig. 4) la partición que divide al intervalo $[a, b]$ y

$$h = x_i - x_{i-1},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots +$$

$$+ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$



(Fig. 4)

Por lo visto en **2.1**:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

$$\int_4^{x_6} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)]$$

y finalmente

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) +$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \cdots +$$

$$+ f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

La fórmula de Simpson para $n + 1$ valores equidistantes conocidos de f (n par) nos queda:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_n) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) +$$

$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2}))]$$

Llamando E a la suma de las ordenadas extremas, P a la suma de las ordenadas de índice par e I a las de índice impar, resulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$$

Nota: La figura 4 muestra gráficamente lo que sucede cuando disponemos de cinco valores equidistantes de f y $[a, b]$ está dividido en n partes.

Para este caso la fórmula de Simpson sería:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_4) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2(f(x_2))]$$

Como en el caso del método de los trapecios, la aproximación por Simpson será mejor cuanto mayor sea n.

Ejemplo:

- Calculemos el valor aproximado de

$$L7 = \int_1^7 \frac{1}{x}\,dx$$

por el método de Simpson.

Dividimos el intervalo $[1, 7]$ en un número par de subintervalos. Por ejemplo, la partición $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se divide en seis partes de longitud $h = 1$ cada parte. La fórmula de Simpson para siete valores de f: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_6) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4))] \Rightarrow$$

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{7} + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}[1 + 0{,}142 + 4(0{,}500 + 0{,}250 + 0{,}166) + 2(0{,}333 + 0{,}200)] =$$

$$= \frac{1}{3}[1{,}142 + 3{,}664 + 1{,}066] = \frac{5{,}872}{3} = 1{,}957$$

Dividiendo $[1, 7]$ en 12 partes iguales obtendremos una aproximación mejor. En este caso la longitud de cada subintervalo es $h = \dfrac{7 - 1}{12} = 0{,}5$ y los puntos de la partición $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3{,}5$, $x_6 = 4$, $x_7 = 4{,}5$, $x_8 = 5$, $x_9 = 5{,}5$, $x_{10} = 6$, $x_{11} = 6{,}5$, $x_{12} = 7$.

$$\int_1^7 \frac{1}{x}dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_{12}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) +$$

$$+ f(x_{11})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10}))] =$$

$$= \frac{0{,}5}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{7} + 4\left(\frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{3{,}5} + \frac{1}{4{,}5} + \frac{1}{5{,}5} + \frac{1}{6{,}5}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\right] =$$

$$= 0{,}166[1 + 0{,}142 + 4(0{,}666 + 0{,}400 + 0{,}285 + 0{,}222 + 0{,}181 + 0{,}153) +$$

$$+ 2(0{,}500 + 0{,}333 + 0{,}250 + 0{,}200 + 0{,}166)] =$$

$$= 0{,}166(1{,}142 + 4 \cdot 1{,}907 + 2 \cdot 1{,}449) = 0{,}166 \cdot 11{,}668 = 1{,}936$$

Seguiremos obteniendo aproximaciones mejores de $L7$ aumentando el número de divisiones del intervalo $[1, 7]$.

Ejercicios:

1. Calcular $L2$ por el método de Simpson.
2. Calcular un valor aproximado de las siguientes integrales por el método de Simpson.

   a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{1+x}$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3. Dada la siguiente tabla de valores de una función f:

x	0	0,25	0,50	0,75	1	1,25	1,50
$f(x)$	0,001	0,200	0,300	0,312	0,215	0,200	0,195

calcular por el método de Simpson un valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{1,5} f(x)\,dx$.

EJERCICIOS FINALES

1. Dada la siguiente tabla de valores de una función:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1,53	1,40	1	0,50	0,75	1

calcular un valor aproximado de $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$.

2. La tabla de valores:

x	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$f(x)$	3,75	3,80	3,95	4,05	4,1	3,95	3,90	3,75	3,60

muestra nueve valores que toman una función f en el intervalo $[0, 0{,}8]$. Calcular de forma aproximada el área del recinto plano que determina f con OX entre $x = 0$ y $x = 0{,}80$.

3. Calcular de forma aproximada el área de la circunferencia de radio unidad.

4. Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ de forma aproximada.

5. Calcular un valor aproximado de los siguientes números:
   a) arc tg1,325.
   b) $L1{,}50 + L3{,}50$.
   c) arc sen0,397.

SIMPSON (Thomas)

Matemático británico (1710-1761). Fue profesor de matemáticas en la Academia Real de Wodwich. Publicó un importante tratado de análisis infinitesimal, *Un nuevo tratado sobre cálculo diferencial*, y varias obras de álgebra y cálculo de probabilidades. Se le deben también dos fórmulas, a las cuales ha quedado ligado su nombre: una para el cálculo numérico de funciones trigonométricas y la otra para la evaluación aproximada del área limitada por una curva, que se estudia en este tema.

UNIDAD 4

AMPLIACIÓN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

En los últimos cincuenta años ha crecido mucho el número de aplicaciones de la probabilidad y de la estadística. Estas aplicaciones se encuentran en los más diversos campos: en la industria (control de calidad), en las empresas dedicadas al comercio (teoría de la decisión), política y sociedad (encuestas de opinión), economía (índices de vida), etc.

En la enseñanza de las ciencias ya no es suficiente desarrollar el pensamiento determinista y hay que prestar la atención que merece al pensamiento probabilístico, por poderse aplicar al estudio de fenómenos como el de la herencia genética, los procesos radiactivos, etc.

El cálculo de probabilidades —cuyo campo de aplicación se extiende, como acabamos de indicar, sobre la mayor parte de las ramas de las ciencias naturales, técnicas y sociales— se ha desarrollado partiendo de un origen muy modesto.

Los problemas sobre juegos de azar planteados por el Caballero de Meré a Pascal dieron origen a una correspondencia entre los matemáticos Pascal y Fermat para tratar de dar solución a dichos problemas. Posteriormente han sido muchos los matemáticos que se han ocupado del estudio de los fenómenos de azar en general.

Huygens, Bernoulli, Laplace, Venn, Bayes y otros son científicos que han contribuido al desarrollo de la teoría de las probabilidades.

TEMA 25 ÁLGEBRA DE SUCESOS

Se distinguen en este tema dos partes bien diferenciadas. La primera se dedica al estudio de los sucesos, sus operaciones y propiedades. Conscientes de que para el estudio del cálculo de probabilidades se necesita constantemente de las técnicas combinatorias, se dedica la segunda parte de este tema a recordar y ampliar el cálculo con variaciones, permutaciones y combinaciones.

1 ESPACIO MUESTRAL

1.1. *Un fenómeno o experiencia se dice que es aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas es imposible predecir el resultado.*

Cuando se puede estar seguro del resultado de una experiencia, aun antes de realizarla, se dice que se trata de un *experimento determinista.*

Ejemplos de experimentos aleatorios son:

- la obtención de respuestas en una encuesta,
- la extracción de una carta de la baraja,
- preguntar a familias de dos hijos sobre el sexo de los mismos y obtener la respuesta,
- lanzar uno o varios dados y anotar los resultados.

Ejemplos de experimentos deterministas son:

- hacer reaccionar el ácido sulfúrico con el cinc. Antes de hacer la experiencia se sabe que el resultado es

$$SO_4H_2 + Zn \rightarrow SO_4Zn + H_2$$

- dejar caer una piedra desde una altura h y determinar la velocidad con que llega al suelo; en este caso se sabe que dicha velocidad v es $v = \sqrt{2gh}$.

Se observa que, aunque se repita un experimento aleatorio varias veces, el resultado de cada experiencia no se conoce «a priori».

1.2. *El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama «espacio muestral», «espacio de resultados» o «universo de los resultados».*

Cada elemento del espacio muestral se llama también *punto muestral.*

Ejemplos:

- El espacio muestral asociado al experimento aleatorio de lanzar una moneda y anotar la cara superior es $E = \{c, x\}$, donde c y x indican «cara» y «cruz», respectivamente.

- El espacio muestral asociado al experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces es:

$$E = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, c, c), (c, x, x), (x, c, x), (x, x, c), (x, x, x)\}$$

La terna (c, x, c), por ejemplo, representa el resultado posible de que en el primer lanzamiento salga «cara», en el segundo «cruz» y en el tercero «cara». Del mismo modo se interpretan las demás ternas.

- Al lanzar un dado, los resultados posibles son $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2 ESPACIO DE SUCESOS

2.1. Sea E el espacio muestral relativo a un experimento aleatorio.

Se llama suceso a todo subconjunto de E. Como los sucesos son subconjuntos, pueden determinarse por extensión enumerando sus elementos; o bien, dando una propiedad que se verifique por y sólo por los elementos de dicho subconjunto.

Diremos que *se verifica*, *se presenta* o *se realiza* un suceso A cuando al realizar el experimento aleatorio se obtiene como resultado uno de los puntos muestrales que forman el suceso A.

Ejemplos:

- En el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, son sucesos, entre otros, los siguientes:
  «salir impar»: $I = \{1, 3, 5\}$
  «salir par»: $P = \{2, 4, 6\}$
  «salir múltiplo de 3»: $A = \{3, 6\}$
  «salir un número mayor o igual que 3»: $B = \{3, 4, 5, 6\}$

- Consideremos el espacio muestral asociado al experimento de lanzar una moneda tres veces.

  Designemos por A, B y C los siguientes sucesos:

  A: «Aparece *cara* al menos dos veces».

  B: «Aparece *cara* dos veces seguidas».

  C: «No se obtiene dos veces seguidas el mismo resultado».

  Estos sucesos quedan definidos por enumeración de sus elementos del modo siguiente:

  $A = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\}$

  $B = \{(c, c, x), (x, c, c)\}$

  $C = \{(c, x, c), (x, c, x)\}$

- En una encuesta los resultados del interrogatorio de cada persona se reflejan en una tarjeta perforada. En las tarjetas se indican el sexo, la edad (si tiene más de 30 años o menos de 30 años) y la respuesta a la pregunta (Sí o No).
  Una vez hecha la encuesta, se elige una tarjeta al azar.
  Calcular:

  I) Los resultados posibles.

  II) Enumera los elementos de cada uno de los siguientes sucesos:

  a) A: «Es un hombre menor de 30 años»,

  b) B: «Es una mujer»,

  c) C: «Es una persona de más de 30 años que ha respondido Sí»,

  d) D: «Es una persona que ha respondido No o que tiene menos de 30 años».

Solución

I) Hay ocho resultados posibles. Cada uno de ellos se puede representar por tres letras: una indicando el sexo, otra la edad y otra para indicar si se ha respondido afirmativa o negativamente.

Poniendo $\begin{cases} V \text{ y } H \text{ para indicar el sexo (varón o hembra)} \\ M \text{ y } M' \text{ para indicar edad (mayor de 30 años y menor de 30 años)} \\ S \text{ y } N \text{ para indicar Sí o No.} \end{cases}$

resulta que los casos posibles (tarjetas posibles) son:

$$E = \begin{Bmatrix} (V, M, S), (V, M, N), (V, M', S), (V, M', N) \\ (H, M, S), (H, M, N), (H, M', S), (H, M', N) \end{Bmatrix}$$

II) Los sucesos A, B, C y D vienen determinados por:

$A = \{(V, M', S), (V, M', N)\}$

$B = \{(H, M, S), (H, M, N), (H, M', S), (H, M', N)\}$

$C = \{(V, M, S), (H, M, S)\}$

$D = \{(V, M, N), (V, M', N), (H, M, N), (H, M', N), (V, M', S), (H, M', S)\}$

2.2. El conjunto formado por todos los sucesos de espacio muestral E se llama *espacio de sucesos*. Es decir, *el espacio de sucesos es el conjunto formado por todos los subconjuntos de E.*

Si $E = \{c, x\}$, el espacio de sucesos es $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$

Observa que $\text{Card}(E) = 2$ y $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^2 = 4$

Sabemos que en general si $\text{Card}(E) = n$, entonces $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$

Los sucesos definidos por los conjuntos $\varnothing$ y E se llaman *suceso imposible* y *suceso seguro*, respectivamente.

Los sucesos formados por un solo punto o elemento del espacio muestral se llaman *sucesos elementales.*

Así, en el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ los sucesos elementales son $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ y $\{6\}$.

Los sucesos no elementales se suelen llamar *sucesos compuestos* o simplemente *sucesos.*

Ejercicios:

1. Se lanza una moneda cuatro veces. Escribir el espacio muestral relativo a este experimento aleatorio y el suceso A consistente en que el número de «caras» (c) es mayor que el número de «cruces» (x).
2. Una caja contiene cuatro bolas blancas y tres negras. Se extrae una bola de la caja.

   Describir el espacio muestral:

   a) cuando las bolas del mismo color se distinguen porque están numeradas;

   b) cuando las bolas del mismo color no se distinguen porque no van numeradas.
3. Hallar el espacio muestral que resulta al lanzar dos monedas y escribir el espacio de sucesos $\mathscr{P}(E)$.
4. ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos $\mathscr{P}(E)$ correspondiente al experimento de lanzar un dado?

---

3 INCLUSIÓN E IGUALDAD DE SUCESOS

3.1. Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral. *Se dice que un suceso A está contenido en el suceso B, y se escribe $A \subset B$, cuando siempre que se presenta el suceso A se verifica el suceso B.*

Ejemplo:

- Consideremos el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ asociado al experimento de lanzar un dado y los sucesos A y B siguientes:

  A: «Sale al menos tres puntos»; $A = \{3, 4, 5, 6\}$

  B: «Sale un número de puntos múltiplo de 3»; $B = \{3, 6\}$

  C: «Sale un número impar»; $C = \{1, 3, 5\}$

  El suceso B está contenido en el suceso A; $B \subset A$

  En cambio, C no está contenido en A; $C \not\subset A$

3.2. *Se dice que dos sucesos A y B del mismo espacio muestral son iguales cuando siempre que se verifica A se verifica B, y recíprocamente.*

Es decir: A y B son iguales si constan de los mismos puntos muestrales.

De las dos definiciones anteriores se deduce que si A y B son iguales, entonces $A \subset B$ y $B \subset A$, y recíprocamente.

Es decir, $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

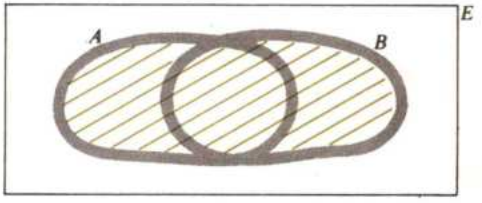
4 OPERACIONES CON SUCESOS

4.1. *Unión de sucesos.*

Dados dos sucesos A y B, se llama «unión» de ellos, y se escribe $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando ocurre al menos uno de los sucesos A o B. (Fig. 1.)

De la definición se deduce que la unión es una operación interna en $\mathscr{P}(E)$; es decir:

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{P}(E)$$



(Fig. 1)

Ejemplo:

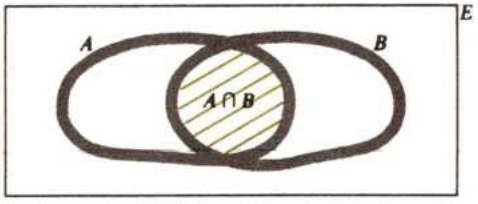
- Sean A y B los sucesos referidos al espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{3, 6\}$

  El suceso $A \cup B$ es: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

4.2. *Intersección de sucesos.*

Se llama «suceso intersección» de los sucesos A y B, y se escribe $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si A y B se realizan simultáneamente. (Fig. 2.)



(Fig. 2)

Como la unión, la intersección es también una operación interna en $\mathscr{P}(E)$; es decir:

$$\forall A,\ B \in \mathscr{P}(E) \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{P}(E)$$

Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles.

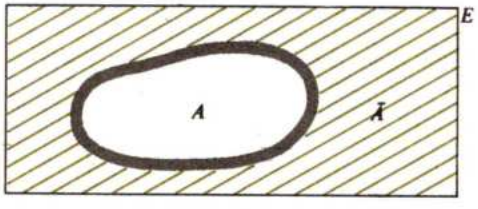
Ejemplos:

- Si A y B son los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, entonces $A \cap B = \{6\}$
- Al lanzar un dado, los sucesos A: «sale número par», $A = \{2, 4, 6\}$, y $B = \{3, 5\}$ son incompatibles, pues $A \cap B = \varnothing$

4.3. *Sucesos contrarios.*

Dado un suceso $A \in \mathscr{P}(E)$, se llama «suceso contrario» de A, y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A, y recíprocamente.

En consecuencia, el suceso $\bar{A}$ es el complementario de A respecto de E. (Fig. 3.)



(Fig. 3)

Es evidente que el suceso contrario de $\bar{\bar{A}}$ es A; por tanto, $\bar{A} = A$, y diremos que los sucesos A y $\bar{A}$ son contrarios.

De la definición se deduce que:

$$A \cup \bar{A} = E \text{ (suceso seguro)}$$
$$A \cap A = \varnothing \text{ (suceso imposible)}$$

Ejemplos:

- Los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 5\}$ del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ son incompatibles, pero no contrarios, pues $A \cup B \neq E$.
- Los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$ del espacio muestral del ejemplo anterior son incompatibles y también contrarios.

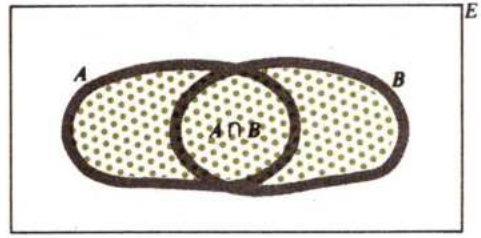
Se observa que los sucesos contrarios son siempre incompatibles, pero el recíproco no siempre es cierto.

4.4. *Cardinal de la unión de dos sucesos.*

El número de sucesos elementales que forman la unión de dos sucesos A y B es su cardinal.

Al sumar el cardinal del suceso A con el cardinal del suceso B se cuentan dos veces los puntos muestrales de la intersección $A \cap B$ (Fig. 4); por tanto,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$



(Fig. 4)

Si los sucesos A y B son incompatibles, entonces $\text{Card}(A \cap B) = 0$, y en este caso se verifica:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Análogamente, para tres sucesos se verifica:

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \\ - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$

Ejercicios:

1. Se lanzan dos dados al aire. Considerar los siguientes sucesos:
   A: «Obtener un número de puntos múltiplo de 2»
   B: «Obtener al menos cuatro puntos»
   ¿Cuáles son los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$?
2. Referido al experimento de lanzar un dado, indicar dos sucesos incompatibles con el suceso $A = \{1, 3\}$
3. En el espacio muestral relativo al experimento de lanzar dos dados se consideran los siguientes sucesos:
   A: «Obtener en el primer dado número impar, y en el segundo, número par»
   B: «Obtener entre los dos dados ocho puntos»
   a) ¿Son A y B incompatibles?
   b) ¿Son contrarios?
4. Referido al experimento de lanzar dos dados, indicar:
   a) dos sucesos incompatibles,
   b) un suceso imposible.
5. Se lanza una moneda cinco veces. ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos correspondiente a este experimento aleatorio? Indicar dos sucesos incompatibles.

5 ÁLGEBRA DE BOOLE DE SUCESOS $\mathscr{P}(E)$

5.1. Sabemos que si $\mathscr{P}(E)$ es el espacio de sucesos, se tiene:

a) $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{P}(E)$

b) $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{P}(E)$

c) $\forall A \in \mathscr{P}(E) \Rightarrow \bar{A} \in \mathscr{P}(E)$

Además, las operaciones de unión, intersección y complementación tienen las propiedades que se sintetizan en el siguiente esquema:

ESTRUCTURA DEL CONJUNTO $\mathscr{P}(E)$

$A \in \mathscr{P}(E)$, $B \in \mathscr{P}(E)$, $C \in \mathscr{P}(E)$, $E \in \mathscr{P}(E)$, $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$

OPERACIONES DEFINIDAS EN $\mathscr{P}(E)$

PROPIEDADES	Unión	Intersección
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	Unión respecto intersección $A \cup (B \cap A) = A$ Intersección respecto unión $A \cap (B \cup A) = A$	
Distributiva	Unión respecto intersección $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Intersección respecto unión $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Elementos neutros	$\varnothing$ es el elemento neutro de la unión $A \cup \varnothing = A$ E es el elemento neutro de la intersección $A \cap E = A$	
Complementación	$A \cup \bar{A} = E$; $A \cap \bar{A} = \varnothing$	

Retículo

Retículo distributivo

Algebra de Boole

Nota: Se sugiere evidenciar estas propiedades mediante diagramas de Venn.

5.2. Además de las propiedades anteriores, son muy utilizadas las siguientes, que son conocidas con el nombre de leyes de Morgan:

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Para tres conjuntos es fácil probar que:

a') $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

b') $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

Las propiedades y leyes del álgebra de Boole son conocidas de cursos anteriores. Algunas de estas propiedades serán utilizadas a lo largo de esta Unidad. Veamos ahora cómo las podemos utilizar para efectuar ciertos cálculos con sucesos.

Ejemplos:

- Simplificar el suceso $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$
  Como $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup B = \varnothing \cup B = B$, resulta:
  $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = B \cap (A \cup \bar{B}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) = (B \cap A) \cup \varnothing = B \cap A$
- Simplificar el suceso $(M \cap N) \cup (M \cap \overline{N})$
  $(M \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = M \cap (N \cup \overline{N}) = M \cap E = M$

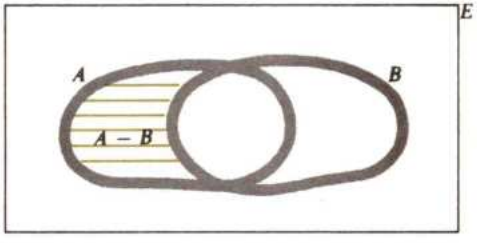
6 OTRAS OPERACIONES CON SUCESOS

6.1. *Diferencia de sucesos.*

Dados dos sucesos A y B, se llama suceso diferencia de A y B, y se escribe $A - B$, al suceso $A \cap \bar{B}$; es decir:

$$A - B = A \cap \bar{B} \quad \text{(Fig. 5)}$$

Se observa que el suceso $A - B$ está formado por los elementos o puntos muestrales de A que no están en B.

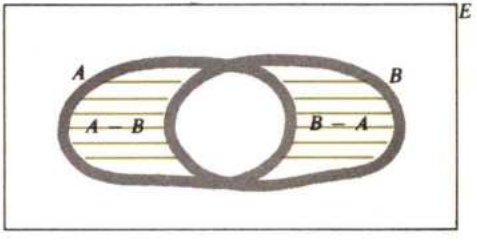


(Fig. 5)

6.2. *Diferencia simétrica de sucesos.*

La unión de los sucesos $A - B$ y $B - A$ se llama diferencia simétrica de los sucesos A y B, y se escribe $A \triangle B$, es decir:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) \quad \text{(Fig. 6)}$$



(Fig. 6)

Ejemplo:

- Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado y anotar los resultados.

  Consideremos los sucesos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$

  Entonces: $A - B = \{1\}$; $B - A = \{4, 5\}$ y $A \triangle B = \{1\} \cup \{4, 5\} = \{1, 4, 5\}$

7 ÁLGEBRA DE SUCESOS

El conjunto $\mathcal{P}(E)$ se sustituye, a veces, por un subconjunto $S \subset \mathcal{P}(E)$.

Se llama *álgebra de sucesos sobre un espacio muestral* E a toda familia S de sucesos o partes de E tales que

Axioma 1.º) $E \in S$

Axioma 2.º) $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$

Es decir, la unión de sucesos es una operación interna en S.

Axioma 3.º) $A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S$

Consecuencias inmediatas:

a) *La intersección de sucesos es interna en* S, es decir, $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$

En efecto: $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$, y por los axiomas 2.º) y 3.º), $\bar{A} \cup \bar{B} \in S$

b) $\varnothing \in S$.

En efecto: $\bar{E} = \varnothing$. Por los axiomas 1.º) y 3.º), $\bar{E} \in S$

c) *La diferencia de sucesos es interna en* S, *es decir*, $A, B \in S \Rightarrow A - B \in S$

En efecto: $A - B = A \cap \bar{B}$; ahora bien, $\bar{B} \in S$ por el axioma 3.º) y $A \cap \bar{B} \in S$ por la consecuencia a).

Ejemplos:

- Toda álgebra de sucesos debe contener E y el $\varnothing$.
  El álgebra que contiene el menor número de sucesos es $\{\varnothing, E\}$.
- Si A es un suceso, entonces $\{\varnothing, A, \bar{A}, E\}$ es un álgebra de sucesos.

8 SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Sean E un espacio muestral y $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una partición de E, es decir:

a) $\forall i, A_i \neq \varnothing$

b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$

c) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$

Se dice entonces que P es un *sistema completo de sucesos.*

Ejemplo:

- En el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, los sucesos $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$ y $A_3 = \{4, 5\}$ cumplen las condiciones anteriores y forman un sistema completo de sucesos.

9 ÁLGEBRA DE SUCESOS ENGENDRADA POR UN SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Sea el conjunto $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una partición del espacio muestral de E. P es, como sabemos, un sistema completo de sucesos.

El conjunto P no es un álgebra de sucesos, ya que no contiene el conjunto vacío.

Veamos que a partir del conjunto P y del conjunto vacío se puede construir un conjunto S que sea un álgebra de sucesos.

Los elementos de este conjunto S son:

a) el conjunto vacío y los elementos del conjunto P,

b) la unión de un número cualquiera de elementos de P.

Probemos que S es un álgebra de sucesos comprobando que se verifican los tres axiomas:

1) $E \in S$, ya que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

2) El axioma 2.º) se verifica por la condición b).

3) Si A es la unión de un cierto número de elementos de P, su complementario es la unión de los restantes elementos de P.

Este conjunto S es un álgebra de sucesos, y por la forma de obtenerse se llama *álgebra de sucesos engendrada por el sistema completo de sucesos P.*

Se puede probar que toda álgebra de sucesos sobre un espacio muestral finito puede ser engendrada por un sistema completo de sucesos.

10 VARIACIONES ORDINARIAS

Dado un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ de n elementos, se llama variación ordinaria de orden k a cada una de las sucesiones de k elementos distintos que se pueden formar con los n elementos de A.

Según la definición, dos variaciones serán distintas si difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos. Al número de variaciones ordinarias de orden k lo designaremos por V_n^k.

Nota: Al ser distintos los elementos de cada variación, es evidente que $k \leq n$.

El número de variaciones de k elementos (orden k) que se pueden formar con n elementos es $V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

En efecto: Para ocupar el primer lugar de la variación podemos elegir cualquier elemento del conjunto A.

Fijado el elemento que ocupa el primer lugar, podemos ocupar el segundo con cualquiera de los $n - 1$ elementos restantes, de modo que los dos primeros lugares se pueden ocupar de $n(n - 1)$ maneras diferentes. Fijado el primero y el segundo lugares, nos quedan $(n - 2)$ elementos disponibles para ocupar el tercero; de modo que los tres primeros lugares se pueden ocupar de $n(n - 1)(n - 2)$ modos diferentes. Continuamos ocupando lugares hasta llegar al k-ésimo y último, que puede ser ocupado por cualquiera de los $(n - k + 1)$ elementos que no han sido colocados.

Por tanto,

$$V_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$$

Teniendo en cuenta que $\begin{cases} n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1 \\ (n - k)! = (n - k)(n - k - 1)(n - k - 2) \dots 2 \cdot 1, \end{cases}$

multiplicando y dividiendo V_n^k por $(n - k)!$ resulta:

$$V_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) =$$

$$= \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)(n - k)(n - k - 1) \dots 2 \cdot 1}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Ejemplo:

- ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

  Solución

  Hay $V_1^{30} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ números de tres cifras.

  De aquí hay que restar $720 : 10 = 72$ números que tienen el cero en el lugar de las centenas, ya que en realidad son números de dos cifras.

  $$720 - 72 = 648$$

  Se pueden formar 648 números de tres cifras diferentes.

11 VARIACIONES CON REPETICIÓN

Dado un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ de n elementos, cada elemento del producto cartesiano $A \times A \times A \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times A$ es una variación con repetición de n elementos de orden k.

Por tanto, el número de variaciones con repetición de n elementos de orden k (número que designaremos por VR_n^k) es:

$$\text{Card}(A \times A \times A \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times A) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(A) \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times \text{Card}(A) =$$
$$= n \times n \times n \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times n = n^k$$

es decir:

$$VR_n^k = n^k$$

Nota: En este caso k puede ser menor, igual o mayor que n.

Una variación con repetición de los n elementos de A de orden k es $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, que se suele escribir simplemente así: $a_1a_2 \ldots a_k$.

Esto nos permite definir las variaciones con repetición del modo siguiente:

Dado un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ de n elementos, *se llama variación con repetición de los n elementos de orden k a toda agrupación de k elementos iguales o distintos elegidos entre los n elementos de A, considerando dos agrupaciones distintas si difieren en algún elemento o en su orden de colocación.*

Ejemplos:

- ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir con las cifras 1, 2, 3?

  Solución

  Cada uno de estos números es una variación con repetición de tres elementos de orden 4. Por tanto:

  $$VR_3^4 = 3^4 = 81$$

- ¿Cuántas quinielas de fútbol diferentes se pueden formar en un torneo en el que hay 6 encuentros?

  Solución

  Cada quiniela es una variación con repetición de los signos 1, X, 2 de orden 6. Por tanto:

  $$VR_3^6 = 3^6 = 729$$

12 PERMUTACIONES ORDINARIAS

Las variaciones ordinarias de m elementos de orden m se llaman permutaciones ordinarias de los m elementos. En consecuencia, dos permutaciones sólo se diferencian en el orden de los elementos.

Por tanto, $P_m = V_m^m = m(m-1)(m-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$

Ejemplos:

- ¿De cuántas maneras se pueden alinear en una fila cinco personas para una foto de grupo?

  Solución

  Se trata de ordenar de todos los modos posibles un conjunto de cinco elementos; por tanto:

  $$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

- ¿Cuántos números de seis cifras diferentes se pueden escribir con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6?

  Solución

  Cada número es una permutación ordinaria de las cifras dadas; por tanto, se pueden escribir:

  $$P_6 = 6! = 720 \text{ números}$$

- ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar siete libros en un estante?

  Solución

  $$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$

13 PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Supongamos que en cada permutación entran m elementos, de los cuales

el elemento a se repite α veces
el elemento b se repite β veces
. . . . . .
el elemento h se repite λ veces

con $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = m$.

Si en una cualquiera de las permutaciones con repetición, por ejemplo:

$$a\ a\ a^{\alpha \text{ veces}}\ a\ b\ b\ b^{\beta \text{ veces}}\ b\ \ldots\ h\ h\ h^{\lambda \text{ veces}}\ h,$$

los elementos a fueran diferentes, quedaría

$$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_\alpha\ b\ b\ b^{\beta \text{ veces}}\ b\ \ldots\ h\ h\ h^{\lambda \text{ veces}}\ h$$

Si se cambian estos α elementos de lugar de todas las maneras posibles sin cambiar el orden de los demás elementos, se obtienen $\alpha!$ permutaciones diferentes. Por tanto, del hecho de que entre los m elementos de cada permutación haya α iguales se deduce que el número de permutaciones es $P_m^\alpha = \dfrac{m!}{\alpha!}$

De forma análoga se deduce que si entre los m elementos de cada permutación hay α iguales entre sí, β iguales entre sí,..., y λ iguales entre sí, el número de permutaciones es

$$P_{m,}^{\alpha\ \beta,\ldots,\lambda} = \frac{m!}{\alpha!\beta!\ \ldots\ \lambda!}$$

Ejemplos:

- ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, se pueden formar con las letras de las siguientes palabras?
  a) dado
  b) mermelada
  c) impermeable
  d) cascada

Solución

a) $d \rightarrow$ se repite dos veces; $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$

b) $m \rightarrow 2$, $e \rightarrow 2$, $a \rightarrow 2$ $\qquad P_9^{2,2,2} = \dfrac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45.360$

c) $m \rightarrow 2$, $e \rightarrow 3$ $\qquad P_{11}^{2,3} = \dfrac{11!}{2! \cdot 3!} = 3.326.400$

d) $c \rightarrow 2$, $a \rightarrow 3$ $\qquad P_7^{2,3} = \dfrac{7!}{2!3!} = 420$

- Una bandera tiene siete franjas. Se quieren pintar tres franjas de rojo, dos de amarillo y dos de verde. ¿Cuántas banderas distintas se pueden formar?

Solución

Se trata de un problema de permutaciones con repetición $\begin{cases} r \to 3 \\ a \to 2 \\ v \to 2 \end{cases}$

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5.040}{24} = 210 \text{ banderas}$$

- Se lanzan siete monedas. ¿Cuántos resultados favorables hay de que salgan tres «caras» y cuatro «cruces»?

Solución

Los resultados favorables son de la forma $\begin{cases} cccxxxx \\ ccxcxxx \\ ccxxcxx \end{cases}$

Es decir, son permutaciones con repetición de siete elementos, en los que uno se repite tres veces y otro cuatro; por tanto

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

14 COMBINACIONES ORDINARIAS

Dado un conjunto A de n elementos, se llama combinación ordinaria de orden k de dichos elementos a todo subconjunto de k elementos de A.

El número de combinaciones de n elementos de orden k lo designaremos por C_n^k.

De la definición se desprende que en las combinaciones ordinarias no se repite ningún elemento, *y no influye el orden de los mismos.*

Dado un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n elementos, *se llama combinación ordinaria de orden k a toda agrupación de k elementos elegidos entre los n elementos de A no repitiéndose ninguno y considerando dos agrupaciones distintas si se diferencian en algún elemento.*

Las combinaciones ordinarias de orden 1 con los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ son 1, 2, 3, 4, 5.

Las combinaciones ordinarias de orden 2 se forman añadiendo a cada combinación de orden 1 todos los elementos que le siguen:

12, 13, 14, 15
23, 24, 25
34, 35
45

Análogamente se forman las combinaciones de orden 3, 4, etc.

Supongamos formadas todas las combinaciones ordinarias de orden k formadas con los elementos de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. En total hay C_n^k. Si en cada una de estas combinaciones cambiamos el orden de colocación de sus elementos de todas las formas posibles, se obtienen las variaciones ordinarias de orden k con los elementos de A. Cada una de las combinaciones de orden k da lugar a $P_k = k!$ variaciones.

Luego

$$V_m^k = C_m^k \cdot k! \Rightarrow C_m^k = \frac{V_m^k}{k!} = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Ejemplos:

- ¿Cuántas rectas determinan ocho puntos, tales que tres cualesquiera no estén alineados?

  Solución

  Si P es el conjunto de los ocho puntos, el problema se reduce a ver cuántos subconjuntos de dos elementos tiene P, puesto que cada dos puntos determinan una línea recta. Entonces el número de rectas determinado por los ocho puntos es:

$$C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

- ¿Cuántos comités de cuatro representantes se pueden nombrar en un grupo de cincuenta personas?

  Solución

  Habrá tantos comités como combinaciones cuaternarias de cincuenta elementos.

$$C_{50}^4 = \binom{50}{4} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{4!} = 230.300 \text{ comités}$$

- De una baraja de cuarenta cartas se extraen dos de ellas. ¿Cuántos casos favorables hay de que salgan dos «oros»?

  Solución

  Como hay diez «oros», los casos favorables son $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

15 COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Dado un conjunto de m elementos, se llama combinaciones con repetición de orden n a las agrupaciones que se pueden formar tomando n de aquellos elementos iguales o distintos y considerando que dos agrupaciones son distintas cuando difieren en algún elemento. Al no importar el orden, los elementos de cada combinación se disponen en el orden alfabético o natural. El número de combinaciones con repetición de m elementos de orden n lo designaremos por CR_m^n.

Veamos las combinaciones monarias, binarias y terciarias con repetición que se pueden formar con los elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$.

De orden 1:

Las combinaciones con repetición coinciden con las ordinarias (en este caso no cabe la repetición).

$$a \quad b \quad c \quad d$$

De orden 2:

Las combinaciones binarias con repetición se obtienen a partir de las de orden 1, escribiendo a la derecha de cada una el último elemento y cada uno de los que le siguen en el orden natural.

$$\left.\begin{matrix} aa,\ ab,\ ac,\ ad \\ bb,\ bc,\ bd \\ cc,\ cd \\ dd \end{matrix}\right\} CR_4^2 = 10$$

El conjunto de combinaciones binarias con repetición se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de combinaciones ordinarias de orden 2 de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Para ello sustituimos las letras de cada combinación por números, del siguiente modo:

La a por 1 más el número de orden anterior al del lugar que ocupa.

La b por 2 más el número de orden anterior al del lugar que ocupa.

La c por 3 más el número de orden anterior al del lugar que ocupa.

La d por 4 más el número de orden anterior al del lugar que ocupa.

Al hacer estas sustituciones resultan las combinaciones ordinarias de orden 2

$$\left.\begin{matrix} \boxed{aa,\ ab,\ ac,\ ad} \leftrightarrow \boxed{12,\ 13,\ 14,\ 15} \\ \boxed{bb,\ bc,\ bd} \leftrightarrow \boxed{23,\ 24,\ 25} \\ \boxed{cc,\ cd} \leftrightarrow \boxed{34,\ 35} \\ \boxed{dd} \leftrightarrow \boxed{45} \end{matrix}\right\} C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$$

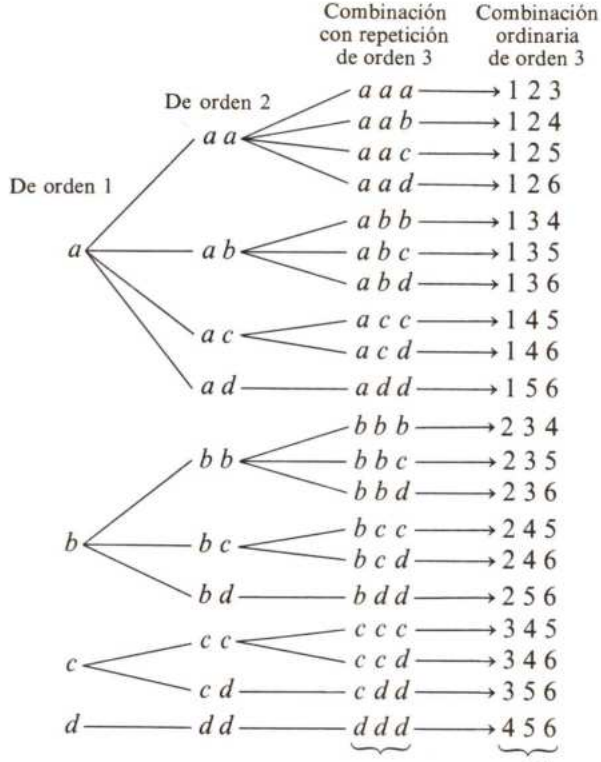
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{CR_4^2 = 10}$$

$$CR_4^2 = C_5^2 = C_{4-2-1}^2$$

De orden 3:

Las combinaciones ternarias con repetición se obtienen a partir de las de orden 2, escribiendo a la derecha de cada una el último elemento y cada uno de los que le siguen en el orden natural.

En el siguiente árbol aparecen las combinaciones con repetición de $\{a, b, c, d\}$ de orden 3, y en correspondencia biunívoca con ellas las combinaciones ordinarias de orden 3 de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; estas combinaciones se han escrito sustituyendo las letras a, b, c y d por números según los convenios anteriores.



$$CR_4^3 = C_6^3 = \binom{6}{3} = 20$$

En los dos casos analizados se ha visto que:

$$CR_4^2 = C_{4+2-1}^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

$$CR_4^3 = C_{4+3-1}^3 = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

Se puede probar que esta ley es general, es decir:

$$CR_m^n = C_{m+n-1}^n = \binom{m+n-1}{n}$$

Ejemplo:

- Se tienen tres vasos diferentes: A, B y C. ¿De cuántos modos diferentes se pueden colocar en ellos cinco bolas idénticas?

$$CR_3^5 = C_{3+5-1}^5 = \binom{3+5-1}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

EJERCICIOS FINALES

1. Sea el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y una moneda. Si A es el suceso de que la moneda salga «cruz» y B es el suceso de obtener 1 o 2 en el dado, indicar el significado de los siguientes sucesos:
   a) $\bar{A}$; b) $\bar{B}$; c) $A \cup B$; d) $\bar{A} \cup \bar{B}$

2. El espacio muestral relativo a un experimento aleatorio es $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y se consideran los sucesos $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{4\}$.

   Indicar los subconjuntos de E que están asociados a las siguientes frases:
   a) Uno al menos de los tres sucesos se ha verificado.
   b) Dos al menos de los tres sucesos se ha verificado.

3. Sean A, B y C tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresar mediante operaciones con sucesos los siguientes:
   a) Se verifica A y C pero no B.
   b) Se verifica al menos uno de los tres sucesos.
   c) Se verifican al menos dos sucesos.
   d) No se verifica ninguno de los tres.
   e) Se verifica uno solo de los tres sucesos.

4. Se considera el experimento aleatorio de lanzar al aire dos dados y anotar los resultados. Se pide:
   a) El espacio muestral.
   b) El número de elementos del espacio de sucesos.
   c) Elementos del suceso «obtener siete puntos».
   d) Elementos del suceso «obtener ocho puntos».
   e) Elementos del suceso «obtener al menos ocho puntos».

5. Se considera el experimento aleatorio de lanzar un dado y anotar el número de su cara superior. Dar dos sistemas completos de sucesos.

6. Se lanzan dos dados de distintos colores sobre una mesa y se anotan los números obtenidos. Determinar por extensión los sucesos A y B siguientes:

   A: «sacar al menos un 6»

   B: «sacar sólo un 6»

7. Simplificar las siguientes operaciones con sucesos:
   a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$
   b) $(M \cup N) \cap (M \cup \bar{N}) \cap (\bar{M} \cup N)$
   c) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

8. Comprobar:
   a) $A - B \neq B - A$
   b) La diferencia no es asociativa.
   c) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
   d) $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
   e) $(\overline{A \cup B}) \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$
   f) La diferencia simétrica es conmutativa y asociativa.

9. Antonio y Benito intervienen en un torneo de tenis. El primero que gane dos partidos seguidos o tres alternos gana el torneo; se pide:
   a) el diagrama en árbol en el que se muestren los resultados posibles
   b) el número de elementos del espacio muestral.

10. De un grupo de cuatro hombres y tres mujeres se quiere elegir un comité representante formado por dos personas.

    Calcular el número de comités diferentes que se pueden formar:
    a) cuando el comité puede estar formado por dos personas cualesquiera;
    b) cuando el comité ha de estar formado por personas de diferente sexo.

11. De una baraja de cincuenta y dos cartas se extraen sucesivamente dos de ellas.

    ¿De cuántas maneras diferentes se pueden realizar estas extracciones teniendo en cuenta el orden?
    a) Cuando la carta extraída se devuelve a la baraja.
    b) Cuando la carta extraída no se devuelve a la baraja.

12. a) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 si no se repite ninguna?
    b) ¿Cuántos de estos números son menores que 400?
    c) ¿Cuántos son pares?
    d) ¿Cuántos son impares?
    e) ¿Cuántos son múltiplos de 5?
    f) ¿Cuántos son múltiplos de 4?

13. ¿De cuántos modos diferentes se pueden sentar en fila cuatro hombres y tres mujeres? ¿De cuántas maneras pueden sentarse si los hombres se sientan juntos y las mujeres también?

14. ¿De cuántas maneras se pueden colocar cinco personas en fila?

15. Se tienen seis libros diferentes de Historia, cuatro diferentes de Matemáticas y dos diferentes de Física. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar en un estante si
    a) los libros de cada asignatura deben estar juntos?
    b) pueden estar revueltos?

BOOLE (George)

Matemático inglés (1815-1864). Por un trabajo sobre el cálculo de proposiciones, se le considera el creador de la lógica matemática.

FERMAT (Pierre)

Matemático francés (1601-1665). Era jurista y se dedicaba a las matemáticas por afición. Trabajó en la teoría de las probabilidades. La correspondencia entre Fermat y Pascal para tratar de resolver los problemas planteados por el Caballero de Meré está considerada como el origen del cálculo de probabilidades. Aportó grandes resultados a distintas ramas de la Matemática, pero fundamentalmente a la teoría de números. Uno de los resultados de Fermat fue el «Gran teorema de Fermat», que asegura que no existen números a, b y c que verifiquen la ecuación

$$a^n + b^n = c^n \text{ para } n > 2$$

Desde hace casi cuatrocientos años, los matemáticos no han conseguido encontrar una demostración de este teorema.

TEMA 26 FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

El comportamiento de las frecuencias relativas que estudiaremos en la primera parte de este tema ha sido el soporte real que ha permitido construir la teoría axiomática de la probabilidad, que se estudiará en el tema siguiente. En la segunda parte del tema se presentarán la definición clásica y la definición frecuencial de probabilidad.

1 FRECUENCIAS

Consideremos un suceso A, es decir, un subconjunto del espacio muestral E relativo a un experimento aleatorio. Si se realiza N veces dicho experimento y el suceso A aparece n_A veces, se dice que:

La frecuencia absoluta del suceso A es n_A, y se escribe: $f_a(A) = n_A$

La frecuencia relativa del suceso A es $f_r(A) = \dfrac{f_a(A)}{N} = \dfrac{n_A}{N}$

Ejemplo:

- Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire un dado.

  Sea el suceso $A = \{2, 4, 6\}$ de sacar un número par. Si hacemos 100 pruebas y obtenemos que el suceso A se ha realizado 52 veces, se tiene:

$$f_a(A) = 52;\ f_r(A) = \frac{52}{100}$$

2 PROPIEDADES DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS

2.1. *La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.* En efecto: Si n_A es la frecuencia absoluta del suceso A en N pruebas, es evidente que $0 \leq n_A \leq N$.

Dividiendo los miembros de esta desigualdad por N se tiene:

$$\frac{0}{N} \leq \frac{n_A}{N} \leq \frac{N}{N};\ \text{luego}\ 0 \leq f_r(A) \leq 1$$

2.2. *La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.*

Como al realizar un experimento aleatorio N veces el suceso seguro se presenta siempre, se tiene que $f_a(E) = N$. Luego: $f_r(E) = \dfrac{N}{N} = 1$.

Análogamente, la frecuencia relativa del suceso imposible es 0, ya que este suceso nunca se presenta: $f_r(\varnothing) = 0$.

2.3. *La frecuencia relativa de dos sucesos incompatibles A y B es igual a la suma de las frecuencias relativas de estos sucesos.*

Consideremos dos sucesos A y B, relativos al mismo experimento aleatorio, que sean incompatibles, es decir, tales que $A \cap B = \varnothing$.

Si en N pruebas el suceso A se presenta n_A veces y el suceso B, n_B veces, el suceso unión $A \cup B$ se presentará $n_A + n_B$ veces, y se tiene:

$$f_r(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} = f_r(A) + f_r(B)$$

Es decir:

$$\boxed{f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)}$$

2.4. *La frecuencia relativa de un suceso más la frecuencia relativa del suceso contrario es 1.*

Supongamos que se ha realizado N veces un experimento aleatorio y sean n_A el número de veces que se ha presentado el suceso A y $n_{\bar{A}}$ el número de veces que se ha presentado el suceso $\bar{A}$.

Como A y $\bar{A}$ son contrarios, se tiene $n_A + n_{\bar{A}} = N$, pues cada vez que se realiza el experimento se verifica el suceso A o su contrario.

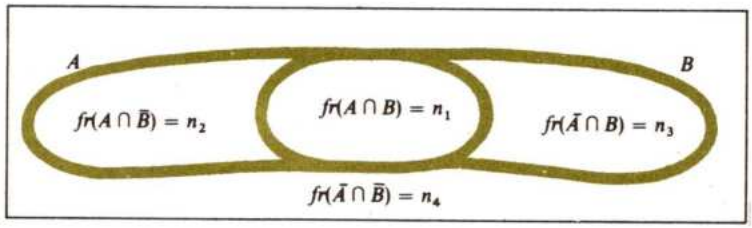
Dividiendo por N la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{n_A}{N} + \frac{n_{\bar{A}}}{N} = \frac{N}{N} = 1, \text{ es decir, } \boxed{f_r(A) + f_r(\bar{A}) = 1}$$

2.5. Sean A y B dos sucesos compatibles y supongamos que en N pruebas los sucesos $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$ se presentan, respectivamente, n_1, n_2, n_3 y n_4 veces, como indica el diagrama de la figura 1.

Es decir:

$f_a(A \cap B) = n_1$
$f_a(A \cap \bar{B}) = n_2$
$f_a(\bar{A} \cap B) = n_3$
$f_a(\bar{A} \cap \bar{B}) = n_4$



(Fig. 1)

De aquí se deduce que el suceso A se ha presentado $n_1 + n_2$ veces; el suceso B, $n_1 + n_3$ veces, y el suceso $A \cup B$, $n_1 + n_2 + n_3$ veces, es decir,

$$f_a(A) = n_1 + n_2,\ f_a(B) = n_1 + n_3 \text{ y } f_a(A \cup B) = n_1 + n_2 + n_3$$

Por consiguiente, las frecuencias relativas de estos sucesos serán:

$$f_r(A) = \frac{f_a(A)}{N} = \frac{n_1 + n_2}{N}$$

$$f_r(B) = \frac{f_a(B)}{N} = \frac{n_1 + n_3}{N}$$

$$f_r(A \cap B) = \frac{n_1}{N}$$

Entonces:

$$fr(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{n_1 + n_2}{N} + \frac{n_1 + n_3}{N} - \frac{n_1}{N};$$ es decir:

$$\boxed{f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)}$$

La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos compatibles es igual a la suma de las frecuencias relativas de esos sucesos menos la frecuencia relativa de la intersección de ellos.

Ejercicios:

1. Se ha lanzado una moneda diez veces y el suceso A: «salir cara» se ha realizado cuatro veces.
   a) ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso A?
   b) ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso B: «salir cruz»?
   c) ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso $A \cup B$?

2. Se ha realizado el experimento aleatorio de lanzar un dado cincuenta veces. Los resultados obtenidos se han ordenado en la siguiente tabla:

Cara del dado	Número de veces
1	12
2	8
3	10
4	9
5	4
6	7

Hallar las frecuencias relativas de:

a) Los sucesos elementales.
b) El suceso «salir par».
c) El suceso salir «impar».
d) El suceso «salir múltiplo de 3».

3 DEFINICIONES CLÁSICA Y FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD

3.1. Hay fenómenos aleatorios, como el lanzamiento de dados, de monedas, etc., en que por razones de simetría y regularidad se puede suponer que todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad de presentarse. En estos casos es útil la definición de probabilidad de Laplace:

La probabilidad de un suceso A es igual al cociente entre el número de casos favorables a que ocurra el suceso y el número de casos posibles, en el supuesto de que todos sean igualmente probables.

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Llamando n al número de casos favorables y N al de casos posibles, se tiene $p = \frac{n}{N}$.

Según esta definición, la probabilidad del suceso imposible es 0, y la del suceso seguro, 1.

Los demás sucesos tienen una probabilidad que varía entre 0 y 1.

Aparte de la incorrección formal de que el término definido entre en la definición, la definición clásica tiene el inconveniente de que en muchas de las más importantes aplicaciones de la probabilidad es imposible la división en cierto número de casos equiprobables, como se exige en ella. Pero la definición es utilizable en todos aquellos casos en que es fácil obtener un espacio muestral con sucesos equiprobables.

3.2. Los fenómenos aleatorios son totalmente imprevisibles de manera aislada, pero presentan regularidades cuando se repiten un número elevado de veces.

Veamos en qué consiste esta regularidad a través de un ejemplo.

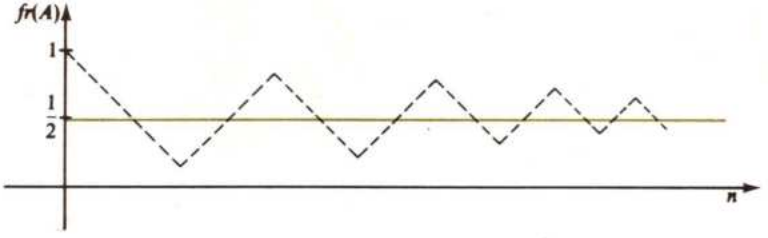
Supongamos el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda cien veces.

Se ha repetido este experimento diez veces y se han obtenido los resultados siguientes:

Experimentos	Número de caras	Número de cruces
1.º	44	56
2.º	48	52
3.º	53	47
4.º	54	46
5.º	52	48
6.º	45	55
7.º	49	51
8.º	53	47
9.º	52	48
10.º	46	54

Se observa que en cada experimento las frecuencias relativas del suceso «salir cara» o del suceso «salir cruz» se estabilizan en torno a un número fijo, en este caso $\frac{1}{2}$.

En la figura 2 aparece, en el eje de abscisas, el número de veces que se ha lanzado una moneda, y en el de ordenadas, la frecuencia relativa del suceso A: «salir cara».



(Fig. 2)

Se observa que cuando n crece la frecuencia relativa del suceso A tiende hacia $\frac{1}{2}$.

En esto consiste la *ley de regularidad de las frecuencias o ley de azar*, que se puede enunciar así:

En un experimento aleatorio, las frecuencias relativas de un suceso cualquiera se aproximan a un número, fijo para cada suceso, cuando el número de repeticiones crece.

Si se toma como hipótesis la ley de azar, entonces los números hacia los que se aproximan las frecuencias relativas de los sucesos cuando crecen se les llama *probabilidades* de dichos sucesos.

La definición frecuencial de probabilidad supone que debemos determinar el valor de la probabilidad de un suceso A por medio de un estudio del comportamiento de las frecuencias relativas de dicho suceso.

Esta determinación *a posteriori* de la probabilidad se haría en aquellos casos en que no es aplicable la definición clásica.

Pero esta definición frecuencial de probabilidad no es satisfactoria, ya que la expresión «se aproxima» o «se estabiliza» no tiene un sentido preciso, además de que contiene una mezcla incómoda de elementos teóricos y empíricos.

Veamos algunos ejemplos en los que se puede aplicar la definición clásica.

4 PROBLEMAS RESUELTOS

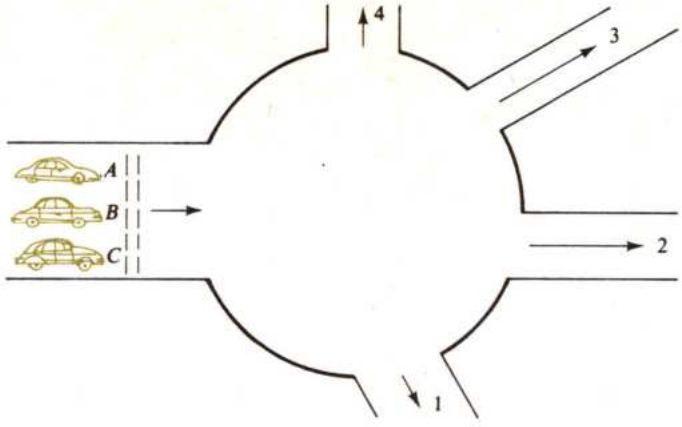
4.1. Cuatro personas escriben al azar una de las cifras 5, 6, 7. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres hayan escrito la misma cifra?

Solución

Casos posibles: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Casos favorables: 3; luego la probabilidad pedida es $\frac{3}{81} = \frac{1}{27}$.

4.2. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres coches A, B y C que hay parados en el semáforo de la figura 3 continúen por la misma calle?



(Fig. 3)

Solución

Si designamos las calles por las cifras 1, 2, 3 y 4, algunos de los casos posibles son los que aparecen en la siguiente tabla:

A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	2	1
1	2	3
1	2	4
–	–	–

La primera fila indica el caso posible de que los tres coches continúen por la calle 1.

Análoga interpretación tienen las restantes filas. Se observa que cada posibilidad es una variación con repetición de las cifras 1, 2, 3 y 4 tomadas de tres en tres, es decir, de orden 3. Por tanto:

Casos posibles: $VR_4^3 = 4^3 = 64$.

Los casos favorables son obviamente 4, luego la probabilidad pedida es $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$.

4.3. Una caja contiene 12 tornillos, de los que 5 son defectuosos y 7 son perfectos. Se extraen 4 tornillos al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) Los 4 tornillos sean defectuosos.

b) Los 4 tornillos sean perfectos.

c) 3 sean perfectos y 1 defectuoso.

Solución

Llamemos p a la probabilidad pedida en cada caso.

a) Casos favorables: $C_5^4 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$

Casos posibles: $C_{12}^4 = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$

Luego $p = \dfrac{C_5^4}{C_{12}^4} = \dfrac{5}{495} \simeq 0{,}0101$

b) Casos favorables: $C_7^4 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Casos posibles: $C_{12}^4 = 495$

$p = \dfrac{35}{495} \simeq 0{,}0707$

c) El número de formas de extraer 3 tornillos perfectos es $C_7^3 = 35$.

El número de formas de extraer 1 tornillo defectuoso es $C_5^1 = 5$.

El número de formas de extraer 3 tornillos perfectos y 1 defectuoso es $C_7^3 \cdot C_5^1 = 35 \cdot 5 = 175$.

Casos favorables: 175.

Casos posibles: $C_{12}^4 = 495$.

Luego $p = \dfrac{C_7^3 \cdot C_5^1}{C_{12}^4} = \dfrac{175}{495} \simeq 0{,}3763$.

4.4. ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 5 cartas de una baraja de 40 contenga 2 reyes y 3 ases?

Solución

Las formas posibles de extraer 2 reyes de la baraja es $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$.

Las formas posibles de extraer 3 ases de la baraja es $C_4^3 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$.

Las formas de extraer 2 reyes y 3 ases es $C_4^2 \cdot C_4^3 = 24$.

Las formas posibles de hacer un grupo de 5 cartas es $C_{40}^5 = \dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= 658.008$; luego $p = \dfrac{24}{658.008} \simeq 0{,}000036$.

EJERCICIOS FINALES

1. Determinar la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
   a) La obtención de 6 puntos en una sola tirada de dos dados.
   b) La aparición de un rey al extraer una carta de una baraja de 40 cartas.
   c) La aparición de al menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.
2. De una caja que contiene 5 bolas blancas, 5 rojas y 4 azules, se extrae una al azar. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea:
   a) blanca; b) roja; c) azul; d) no blanca; e) roja o azul.
3. Hallar la probabilidad de obtener al menos un 3 en dos lanzamientos de un dado.
4. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) Obtener 8 puntos en una sola tirada de dos dados.
   b) Obtener en una sola tirada con dos dados una suma de 7 u 11.
   c) Obtener al menos una cara en tres lanzamientos con una moneda.
5. De una baraja de 40 cartas se eligen 5 al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo?
6. En una urna hay 5 bolas numeradas del 1 al 5.
   ¿Cuál es la probabilidad de que al extraerlas una a una salgan en orden correlativo 1, 2, 3, 4, 5?
7. Hallar la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces salga al menos un 4.
8. Se sacan al azar dos cartas de una baraja de 40 cartas. Hallar la probabilidad de que:
   a) las dos sean oros; b) una sea oros y la otra espadas.
9. En una caja hay 15 lámparas, de las que 5 son defectuosas. Se eligen 3 al azar. Hallar la probabilidad de que:
   a) ninguna sea defectuosa; b) una exactamente sea defectuosa.
10. Una urna contiene a bolas negras y b bolas blancas. Si se extraen $\alpha + \beta$ bolas de la urna, ¿cuál es la probabilidad de que α sean negras y β sean blancas?
11. De una baraja de 40 cartas se extraen 5. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 2 reyes?
12. Un ingeniero trabaja en dos fábricas A y B. Los autobuses que le llevan a las fábricas parten del mismo lugar. A las horas exactas sale el que le lleva a la fábrica A y a las horas exactas más un cuarto el que le lleva a B. Si sale de su casa sin preocuparse de la hora y toma el primer autobús que llega, ¿cuál es la probabilidad de que visite la fábrica A?

LAPLACE (Pierre Simon)

Matemático y astrónomo francés (1749-1827). Es conocido por su famosa teoría de la nebulosa que originó el sistema solar. Escribió entre 1812 y 1820 un tratado sobre la *teoría de las probabilidades*, en el que recogía y perfeccionaba los resultados y problemas de esta materia conocidos hasta entonces. En cooperación con Lagrange, demostró que la excentricidad total de las órbitas de los planetas del sistema solar permanecía constante, suponiendo que giraran alrededor del Sol en el mismo sentido (que es como en realidad giran). Es decir, si la órbita de un planeta aumentara su excentricidad, las de los demás tenderían a disminuir para mantener el equilibrio.

TEMA 27
ESTUDIO AXIOMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

La falta de rigor lógico en la definición clásica de probabilidad y los inconvenientes de la definición frecuencial de Von Mises, que mezcla elementos teóricos y empíricos, llevó a seguir la investigación y búsqueda de una definición satisfactoria de probabilidad.

La definición axiomática de Kolmogoroff, que presentamos en este tema, data de 1933 y es satisfactoria desde el punto de vista matemático. Kolmogoroff considera el concepto de probabilidad como un modelo de la noción de frecuencia. Los aspectos más importantes del comportamiento de las frecuencias relativas son incorporados por un proceso de abstracción a los axiomas de la probabilidad.

1 CONCEPTO DE MEDIDA

Definición

Sea $\mathscr{F}$ una familia de conjuntos.

Toda aplicación $m: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ de $\mathscr{F}$ en el conjunto de los números reales que verifica las condiciones:

1.ª) $\forall A \in \mathscr{F},\ m(A) \geq 0$

2.ª) $\forall A,\ B \in \mathscr{F},\ A \cup B \in \mathscr{F}$

3.ª) $(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

se dice que es una *medida* sobre $\mathscr{F}$.

Si E es un conjunto finito, la aplicación $\mathscr{P}(E) \to \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{\text{números naturales}\}$, que asocia a cada $A \in \mathscr{P}(E) \to \text{Card}(A)$ es una medida, pues se verifica:

1.º) $\forall A \in \mathscr{P}(E);\ \text{Card}(A) \geq 0$

2.º) $\forall A,\ B \in \mathscr{P}(E);\ A \cup B \in \mathscr{P}(E)$

3.º) $(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

También son medidas las longitudes, las áreas, los volúmenes, etc.

2 DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

2.1. Sean E un espacio muestral finito y S un álgebra de sucesos definida en E (en particular, S puede ser $\mathscr{P}(E)$).

Se llama probabilidad a toda aplicación de S en el conjunto $\mathbb{R}$ *de los números reales* $p: S \to \mathbb{R}$ *tal que:*

Axioma 1.º: *Para todo suceso* A, $0 \leq p(A) \leq 1$
es decir, el conjunto imagen de la aplicación p es el segmento $[0, 1]$.

Axioma 2.º: $p(E) = 1$
es decir, la imagen del espacio muestral o suceso seguro E es 1.

Axioma 3.º: *Para todo par de sucesos incompatibles A y B es:*
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

A este axioma 3.º se le llama a veces axioma de las probabilidades totales.
De la definición de probabilidad se deduce que una probabilidad es una medida sobre el conjunto E; por esta razón, veremos que algunas propiedades de las probabilidades son comunes a todas las medidas.

Observaciones

1. Es conveniente advertir que la palabra probabilidad se emplea con dos acepciones diferentes. De una parte, se trata de la aplicación $p: S \to \mathbb{R}$; de otra, la probabilidad del suceso A es $p(A)$, es decir, la imagen de A por la aplicación p. En general, no existe peligro de confusión porque el contexto permite distinguir de qué acepción se trata.

2. En la definición de probabilidad puede restringirse el alcance del axioma 1.º poniendo simplemente Axioma 1.º «Para todo suceso A, $p(A) \geq 0$», ya que se puede deducir que $p(A) \leq 1$.

3. Los tres axiomas que sirven para definir la probabilidad no son más que la traducción de las propiedades de las frecuencias relativas.

2.2. *Espacio de probabilidad.*

Se llama *espacio de probabilidad* o *espacio probabilístico* a la terna (E, S, p), donde:

E es el espacio muestral o conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.

S es un álgebra de sucesos sobre E, que en particular puede ser $\mathscr{P}(E)$.

p es la aplicación probabilidad $p: S \to \mathbb{R}$, que cumple los tres axiomas de **2.1**.

Si E es un conjunto finito, entonces (E, S, p) se dice un *espacio de probabilidad finito*.

Ejemplos:

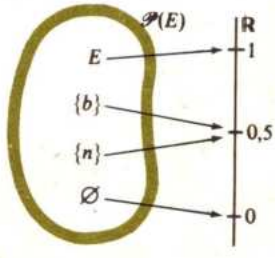
- Consideremos un espacio muestral $E = \{b, n\}$, que puede asociarse al experimento de extraer una bola de una urna que contiene bolas blancas y negras.

  El conjunto de partes de E es $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{b\}, \{n\}, E\}$.

  La aplicación definida por el diagrama de la figura 1 es una probabilidad.

  $p(E) = 1$
  $p(\{b\}) = p(\{n\}) = 0{,}5$
  $p(\varnothing) = 0$

  Es evidente que los tres axiomas de la probabilidad se cumplen; por tanto, la terna $(E\ \mathscr{P}(E), p)$ es un espacio probabilístico finito.



(Fig. 1)

- Sea $E = \{1, x, 2\}$ el espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado de quinielas y anotar los resultados.

  El conjunto de partes es: $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, x\}, \{1, 2\}, \{x, 2\}, E\}$.

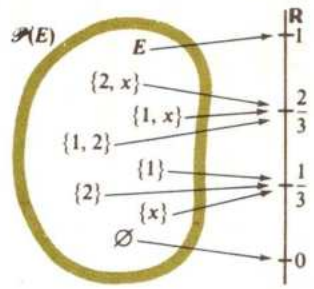
  La aplicación $p: \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ representada en la figura 2 es una probabilidad:

$p(\varnothing) = 0$

$p(\{1\}) = p(\{x\}) = p(\{2\}) = 1/3$

$p(\{1, x\}) = p(\{1, 2\}) = p(\{x, 2\}) = 2/3$

$p(E) = 1$



(Fig. 2)

  También es inmediato comprobar que se verifican los tres axiomas que definen la probabilidad.

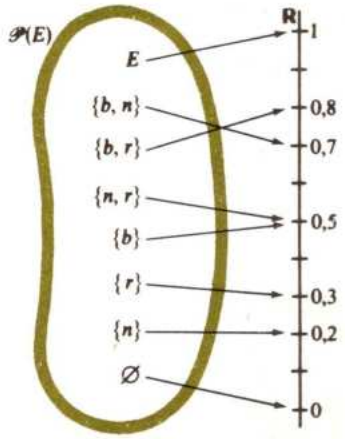
- El espacio muestral asociado al experimento de extraer una bola de una caja que contiene bolas blancas, negras y rojas es $E = \{b, n, r\}$.

  El conjunto de partes o espacio de sucesos es:

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{b\}, \{n\}, \{r\}, \{b, n\}, \{b, r\}, \{n, r\}, E\}$$

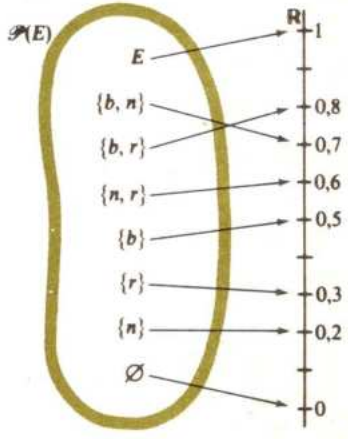
  Los diagramas de las figuras 3 y 4 definen dos aplicaciones de $\mathscr{P}(E)$ en $\mathbb{R}$.

$p_1: \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$



(Fig. 3)

$p_2: \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$



(Fig. 4)

  La aplicación p_1 verifica los tres axiomas de la probabilidad; en cambio, la aplicación p_2 *no es una probabilidad*, ya que $p_2\{n, r\} = 0{,}6$ (ver Fig. 4).

  Pero $\{n\ r\} = \{n\} \cup \{r\}$, y siendo $\{n\}$ y $\{r\}$ sucesos incompatibles debería ser: $p_2(\{n, r\}) = p_2(\{n\}) + p_2(\{r\}) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5 \neq 0{,}6$.

Ejercicios:

1. Dado el conjunto $E = \{1, 2\}$, se define la aplicación m_1 de $S = \mathscr{P}(E)$ en $\mathbb{R}$ del modo siguiente:

$$m_1: S \to \mathbb{R}$$
$$\forall A \in S;\ m_1(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } 2 \in A \\ 0 \text{ si } 2 \notin A \end{cases}$$

Se pide:

a) La imagen de los cuatro elementos de S.

b) Comprobar que la aplicación m_1 es una medida.

2. Sea $E = \{c, x\}$ el espacio muestral asociado al experimento de lanzar una moneda defectuosa o trucada que da más caras que cruces al lanzarla. Se definen las aplicaciones p_1 y p_2 siguientes:

$p_1: (E) \longrightarrow \mathbb{R}$			$p_2: (E) \longrightarrow \mathbb{R}$		
$p_1(\varnothing)$	=	0	$p_2(\varnothing)$	=	0
$p_1(\{c\})$	=	2/3	$p_2(\{c\})$	=	2/3
$p_1(\{x\})$	=	1/3	$p_2(\{x\})$	=	1/4
$p_1(E)$	=	1	$p_2(E)$	=	1

¿Cuál de las dos aplicaciones puede ser una probabilidad en el álgebra de sucesos $\mathscr{P}(E)$?

3 TEOREMAS QUE SE DEDUCEN DE LA DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

3.1. *Probabilidad del suceso contrario.*

La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es 1.

$$\begin{cases} A \cup \bar{A} = E \\ A \cap \bar{A} = \varnothing \end{cases}$$

Aplicando los axiomas 2.º y 3.º, se tiene:

$$p(E) = 1 = p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$$

De donde:

$$\boxed{p(A) + p(\bar{A}) = 1} \Rightarrow \begin{cases} p(\bar{A}) = 1 - p(A) \\ \text{o bien} \\ p(A) = 1 - p(\bar{A}) \end{cases}$$

3.2. *Probabilidad del suceso imposible.*

La probabilidad del suceso imposible es cero; $p(\varnothing) = 0$, ya que $\varnothing = \bar{E}$, y por tanto, $p(\varnothing) = p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$.

3.3. *Teorema de las probabilidades totales para sucesos incompatibles.*

La probabilidad de suceso unión de un número finito de sucesos incompatibles entre sí dos a dos es igual a la suma de las probabilidades de dichos sucesos.

Es decir, si A, B y C son tres sucesos dos a dos incompatibles, entonces:

$$\boxed{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)}$$

En efecto, si $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap C = \varnothing$, entonces $(A \cup B) \cap C = \varnothing$; es decir, los sucesos $A \cup B$ y C son incompatibles. Por tanto, aplicando el axioma 3.º se tiene:

$$p(A \cup B \cup C) = p\,[(A \cup B) \cup C] = p(A \cup B) + p(C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

Esta fórmula se extiende, de modo análogo, a la unión de un número finito $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de sucesos incompatibles:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \cdots + p(A_n)$$

Este teorema es en realidad una extensión del axioma 3.º de las probabilidades totales.

3.4. *Probabilidad de la diferencia de sucesos.*

Si A y B son dos sucesos cualesquiera, se verifica:

$$\boxed{p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)}$$

El suceso A es la unión de los sucesos incompatibles $A \cap B$ y $A - B$

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$. (Fig. 5.)

Por la igualdad anterior, se tiene:

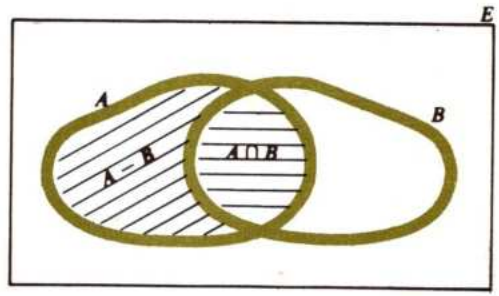
$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A - B)]$,

y aplicando el axioma 3.º resulta:

$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A - B)] =$

$= p(A \cap B) + p(A - B)$. Luego:

$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$



(Fig. 5)

3.5. *Teorema de la probabilidad total.*

La probabilidad del suceso unión de los sucesos A y B del mismo espacio muestral es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos A y B menos la probabilidad del suceso intersección $A \cap B$.

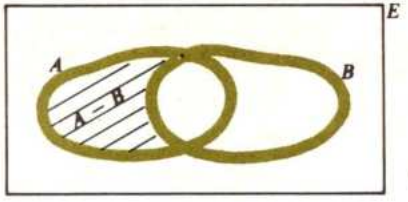
O también: Cualquiera que sean los sucesos A y B de un mismo espacio muestral:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Demostración

El suceso $A \cup B$ es la unión de los sucesos $A - B$ y B, que son incompatibles (Fig. 6).

$$A \cup B = B \cup (A - B)$$



(Fig. 6)

En consecuencia, $p(A \cup B) = p[B \cup (A - B)]$, y al ser incompatibles B y $A - B$, podemos aplicar el axioma 3.º:

$$p(A \cup B) = p[B \cup (A - B)] = p(B) + p(A - B)$$

Teniendo en cuenta el valor de $p(A - B)$ según la propiedad anterior, resulta:

$$p(A \cup B) = p(B) + p(A - B) = p(B) + p(A) - p(A \cap B)$$

Luego $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

3.6. El teorema anterior se generaliza fácilmente sin recurrir a los axiomas. Por ejemplo, para tres sucesos A, B y C cualesquiera es:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(B \cap C) - p(A \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

En efecto: $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Aplicando el teorema anterior de forma reiterada se tiene:

$$\begin{aligned} p(A \cup B \cup C) &= p(A) + p(B \cup C) - p[A \cap (B \cup C)] = \\ &= p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - p[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \quad [1] \end{aligned}$$

Ahora bien, el último término de esta igualdad se puede transformar con:

$$\begin{aligned} p[(A \cap B) \cup (A \cap C)] &= p(A \cap B) + p(A \cap C) - p[(A \cap B) \cap (A \cap C)] = \\ &= p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Sustituyendo en [1] se obtiene la igualdad que queremos demostrar.

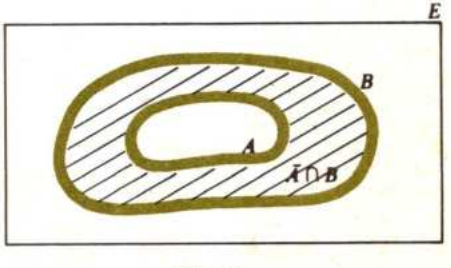
3.7. *Si A y B son dos sucesos tales que $A \subset B$, entonces $p(A) \leq p(B)$.*

En efecto, $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (\bar{A} \cap B)$. (Fig. 7.)

Aplicando el axioma 3.º de las probabilidades totales a los sucesos incompatibles A y $\bar{A} \cap B$, se tiene:

$$p(B) = p[A \cup (\bar{A} \cap B)] = p(A) + p(\bar{A} \cap B)$$

Como por el axioma 1.º es $p(\bar{A} \cap B) \geq 0$, resulta que $p(B) \geq p(A)$, o bien: $p(A) \leq p(B)$. Por tanto, $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$



(Fig. 7)

3.8. Si A y B son dos sucesos cualesquiera, se verifican las siguientes desigualdades:

a) $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$

b) $p(A \cap B) \leq p(A) + p(B)$

c) $p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$

En efecto:

a) Del teorema de las probabilidades totales $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ se deduce que $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$, ya que $p(A \cap B) \geq 0$ por el axioma 1.º.

b) Del mismo teorema resulta: $p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$, y como $p(A \cup B) \geq 0$, se deduce que $p(A) + p(B) \geq p(A \cap B)$, o bien:

$$p(A \cap B) \leq p(A) + p(B).$$

c) Como $A \cap B \subset A$, se deduce de la propiedad **3.7** que $p(A \cap B) \leq p(A)$.

Como $A \subset A \cup B$, se deduce de la propiedad **3.7** que $p(A) \leq p(A \cup B)$, de donde $p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$.

Ejemplos:

- Hallar la probabilidad de un suceso A sabiendo que la suma de su cuadrado y del cuadrado de la probabilidad del suceso contrario es $\frac{5}{9}$. (Ejercicio propuesto en las pruebas de selectividad en 1976.)

Solución

Si $\bar{A}$ es el suceso contrario de A, se tiene:

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$, y según el enunciado:

$$[p(A)]^2 + [p(\bar{A})]^2 = \frac{5}{9}.$$

Por tanto, $[p(A)]^2 + [1 - p(A)]^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow [p(A)]^2 + 1 + [p(A)]^2 - 2p(A) = \frac{5}{9}$

$$2[p(A)]^2 - 2p(A) + \frac{4}{9} = 0$$

Haciendo $x = p(A)$, resulta:

$$18x^2 - 18x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Solución: $p(A) = \frac{2}{3}$, o también, $p(A) = \frac{1}{3}$.

- Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0{,}48$, y $p(A \cap B) = 0{,}14$. ¿Entre qué límites puede variar $p(A)$?

Solución

Para todo par de sucesos del mismo espacio se verifica:

$$p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$$

Por tanto, $0{,}14 \leq p(A) \leq 0{,}48$.

- Se consideran dos sucesos A y B para los cuales se conocen sus probabilidades:

$p(A) = a$

$p(B) = b$

$p(A \cap B) = c$

Calcular en función de a, b y c las probabilidades siguientes:

a) $p(\overline{A \cap B})$

b) $p(\bar{A} \cup \bar{B})$

c) $p(A \cup B)$

d) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

e) $p(\bar{A} \cap B)$

f) $p(\bar{A} \cup B)$

Solución

a) $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - c$

b) Por una de las leyes de Morgan se tiene:

$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - c$

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = a + b - c$

d) Aplicando las leyes de Morgan:

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - (a + b - c) = 1 - a - b + c$

e) Llamemos $x = p(\bar{A} \cap B)$. En la figura 8 se observa que haciendo la unión de A con $\bar{A} \cap B$ se obtiene $A \cup B$.

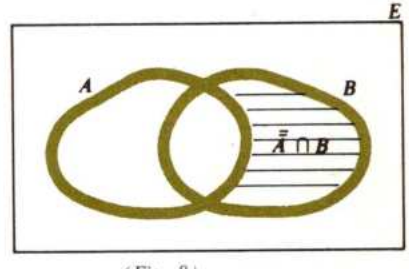
$A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$

Como A y $\bar{A} \cap B$ son incompatibles, resulta $p[A \cup (\bar{A} \cap B)] = p(A) + p(\bar{A} \cap B) = a + x$.

Por otra parte, $p(A \cup B) = a + b - c$.

De donde $a + b - c = a + x$.

Luego $x = p(\bar{A} \cap B) = b - c$



(Fig. 8)

f) Teniendo en cuenta e):

$p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A} \cap B) = 1 - p(A) + p(B) - p(\bar{A} \cap B) =$
$= 1 - a + b - (b - c) = 1 - a + c$

4 CONSTRUCCIÓN DE UNA PROBABILIDAD

4.1. Sea $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un espacio muestral y designemos por $A_i = \{a_i\}$ los sucesos elementales de E.

¿Cómo podemos asignar probabilidades a los sucesos de E?

Veamos que una probabilidad sobre E queda totalmente determinada cuando se conocen las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales de E, cumpliendo las dos condiciones siguientes:

a) $0 \leq p(A_i) \leq 1$

b) $p(A_1) + (A_2) + \cdots + p(A_n) = 1$

Probemos que de este modo se puede encontrar fácilmente la probabilidad de un suceso $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ cualquiera.

En efecto:

$$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_k\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k.$$

Entonces, como los sucesos elementales son incompatibles dos a dos:

$$p(A) = p[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k)$$

Lo que nos dice que *la probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman.*

Ejemplo:

- Supongamos un dado cargado de tal modo que se han asignado las siguientes probabilidades a los sucesos elementales del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sucesos elementales	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
Probabilidades	0,1	0,2	0,2	0,1	0,15	0,25

Entonces la probabilidad del suceso A:

A: «Obtener número par» $A = \{2, 4, 6\}$ es:

$p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}55$

4.2. *Sucesos equiprobables. Regla de Laplace.*

Un caso particular y simple de probabilidad en un espacio muestral finito es aquel en el que se puede suponer que cada suceso elemental tiene la misma probabilidad. Cuando esto ocurre se dice que los sucesos elementales son *equiprobables.*

En este caso, si hay n sucesos elementales $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $p(A_1) = p(A_2) = \cdots = p(A_n) = h$, entonces:

$$1 = p(E) = p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = \\ = h + h + \cdots h = hn.$$

Luego:

$$p(A_1) = p(A_2) = \cdots = p(A_n) = h = \frac{1}{n}.$$

Si entre los n resultados posibles equiprobables hay de ellos k favorables a la realización del suceso A, es decir,

$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, se tiene:

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{(k \text{ veces})}{\cdots} + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Así llegamos a la regla de Laplace:

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo:

- Si se lanza un dado perfecto, la perfección del dado nos induce a suponer que la probabilidad de cada suceso elemental es la misma. Como además la suma de estas probabilidades ha de ser 1, se asigna a cada suceso elemental 1/6 de probabilidad.

  En este caso, la probabilidad del suceso A: «Obtener número par» es:

$$p(A) = p\{2, 4, 6\} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Estas probabilidades que, como en el ejemplo del dado perfecto, se asignan a los sucesos por consideraciones teóricas se llaman probabilidades *a priori*, y, siempre que no exista razón alguna que favorezca la presencia de uno de los sucesos elementales con respecto de los demás, admitiremos que todos ellos tienen la misma probabilidad.

4.3. *Suerte a favor y suerte en contra.*

En ocasiones los juegos de azar se expresan en función de la suerte a favor, mejor que en función de las probabilidades. En lugar de decir que la probabilidad de obtener un 2 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$ se dice con frecuencia que la suerte a favor del suceso está como 1 a 5. Esto se puede relacionar con la probabilidad poniendo: $\frac{1}{6} = \frac{1}{1+5}$.

En general, si la probabilidad de un suceso A es $p(A) = \frac{a}{a+b}$, se dice que la suerte a favor de A es de a a b y que la suerte en contra es de b a a.

EJERCICIOS FINALES

1. De las siguientes aplicaciones de $\mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$, $E = \{a, b\}$, indicar las que son probabilidades.

   a) $\begin{cases} p_1(\{a\}) = p_1(\{b\}) = 0{,}5 \\ p_1(\varnothing) = 0;\ p_1(E) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} p_2(\{a\}) = 0{,}5;\ p_2(\{a\}) = 0{,}6 \\ p_2(\varnothing) = 0;\ p_2(E) = 1 \end{cases}$

2. Dado $E = \{1, 2, 3\}$, se considera la aplicación p: $\mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ definida por:

   $p(\{1\}) = p(\{2\}) = 0{,}2;\ p(\{3\}) = 0{,}8$
   $p(\{1, 2\}) = 0{,}4;\ p(\{1, 3\}) = 0{,}8 = p(\{2, 3\}),\ p(E) = 1$
   $p(\varnothing) = 0$

   ¿Es p una probabilidad?

3. Definir una probabilidad $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo $E = \{0, 1, 2\}$.

4. En una urna hay seis bolas blancas, cinco amarillas, siete azules, cinco rojas y nueve verdes. Se extrae una bola al azar. Hallar la probabilidad de que sea azul, roja o amarilla.

5. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6 la suma sea 18?

6. Hallar la probabilidad de un suceso sabiendo que la suma de su cuadrado y del cuadrado de la probabilidad del suceso contrario es $\frac{13}{18}$.

7. En una ciudad hay tres periódicos, A, B y C.

   Se sabe que:
   El periódico A lo leen el 20 por 100 de los habitantes.
   El periódico B lo leen el 10 por 100 de los habitantes.
   El periódico C lo leen el 5 por 100.

   Además, A y B lo leen el 4 por 100, A y C el 3 por 100, B y C el 2 por 100 y finalmente los tres periódicos los leen el 1 por 100.

   Elegido un habitante de dicha ciudad al azar, hallar la probabilidad de que no lea ninguno de los tres periódicos.

8. Sea $E = \{1, 2, 3\}$. Asignar probabilidades a los tres sucesos elementales del espacio muestral de modo que no haya dos de ellos con la misma probabilidad y hallar las probabilidades de cada uno de los ocho sucesos de E.

9. Un experimento tiene tres resultados posibles: A_1, A_2 y A_3. Se sabe que $p(A_1 \cup A_2) = \frac{2}{3}$, y $p(A_2 \cup A_3) = \frac{5}{6}$. Hallar las probabilidades de A_1, A_2 y A_3.

10. Se tienen cinco juguetes numerados del 1 al 5. Si se escogen al azar dos juguetes, ¿cuál es la probabilidad de que el número mayor sea 3?

11. Un colegio tiene 500 estudiantes, y se sabe que: 300 leen inglés, 200 leen francés, 50 leen alemán, 20 leen francés y alemán, 30 leen inglés y francés, 10 leen los tres idiomas.

    Si al azar se escoge un estudiante de este colegio, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante:

    a) Lea dos y solamente dos idiomas? b) Lea cuando menos un idioma?

12. Se lanzan dos dados. Se representan con x los valores del primer dado y con y los del segundo.

    Consideremos los sucesos A: $x + y = 9$
    B: $x \geq y$

    Hallar las probabilidades de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

TEMA 28
PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA

En este tema se va a estudiar cómo queda modificada la probabilidad de un suceso cuando disponemos de la información adicional de que se ha presentado otro.

Sea, por ejemplo, el espacio muestral $E = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$ *asociado al experimento aleatorio de lanzar dos monedas.*

La probabilidad del suceso $\{(c, c)\}$, *«salir las dos monedas cara», es evidentemente* $\frac{1}{4}$. *Supongamos que después del lanzamiento de las dos monedas alguien nos informa de que una moneda salió cara. La probabilidad del suceso* $\{(c, c)\}$ *ya no es* $\frac{1}{4}$, *sino* $\frac{1}{3}$, *ya que ahora son sólo tres los casos posibles.*

1 PROBABILIDAD CONDICIONADA

1.1. Consideremos el experimento de lanzar dos dados, uno negro y otro rojo, y anotar los resultados.

Llamemos n y r al número de puntos obtenido en cada uno.
El espacio de resultados o espacio muestral está formado por 36 puntos muestrales:

$$E = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$$

Consideremos los sucesos A y B siguientes del espacio de sucesos $\mathscr{P}(E)$.

A: «La suma de los puntos obtenidos es menor o igual que 5.»

B: «La puntuación en el dado negro es mayor que la puntuación en el dado rojo.»

En la figura 1 aparece el espacio muestral y los sucesos A y B. El suceso A contiene 10 puntos muestrales, y el B, 15.

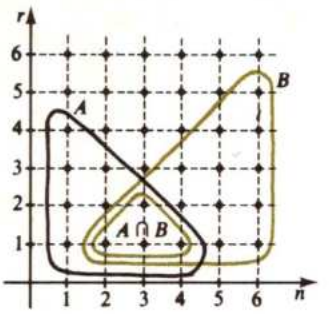
Si suponemos que los dados son perfectos, cada uno de los sucesos elementales tiene la misma probabilidad: $\frac{1}{36}$. Queda así definida la función $p: \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ de probabilidad y el espacio probabilístico $(E, \mathscr{P}(E), p)$.

En consecuencia, $p(A) = \frac{10}{36}$, y $p(B) = \frac{15}{36}$.

Como el suceso $A \cap B$ tiene cuatro puntos muestrales, se tiene que $p(A \cap B) = \frac{4}{36}$.

Vamos a suponer ahora que ya sabemos que se ha verificado el suceso A y que con esta información queremos calcular la probabilidad del suceso B.

Esta probabilidad se llama *probabilidad condicional de B en la hipótesis A*, o *probabilidad del suceso B sabiendo que A se ha realizado*, y se designa por $p(B/A)$.
Si suponemos que el suceso A se ha realizado, entonces los resultados posibles son 10 solamente (los 10 puntos muestrales de A), y de ellos hay cuatro favorables a que se presente el suceso B (Fig. 1). Estos 4 resultados favorables son los correspondientes al suceso $A \cap B$.



(Fig. 1)

Por consiguiente, $p(B/A) = \dfrac{4}{10}$.

De este modo se ve que la probabilidad del suceso B, que era $p(B) = \dfrac{15}{36}$, ha cambiado con la hipótesis A, pues suponiendo que A se ha realizado, la probabilidad de B es $\dfrac{4}{10}$.

Se observa en este ejemplo que:

$$p(B/A) = \frac{4}{10} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esta última igualdad sugiere la siguiente definición.

1.2. *Dado un espacio de probabilidad* (E, S, p) *y un suceso* $A \in S$ *con probabilidad no nula* $p(A) \neq 0$, *se llama probabilidad condicional (o condicionada) del suceso B en la hipótesis A, y se indica por* $p(B/A)$ *o* $p_A B$, *al cociente:*

$$\boxed{p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$$

Análogamente, suponiendo $p(B) \neq 0$, la probabilidad condicionada de A respecto del suceso B es:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

De las dos relaciones anteriores se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A)p(B/A) \\ p(A \cap B) &= p(B)p(A/B) \end{aligned}}$$

Ejemplos:

- Se lanzan dos dados. Si la suma de los puntos de las caras superiores es 7, hallar la probabilidad de que en alguno de los dados salga 3.

Solución

Sean A y B los sucesos:

A: «La suma de los puntos es 7»; $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (6, 1), (5, 2), (4, 3)\}$.

B: «Alguno de los dados sale con tres puntos»; $\{(3, 4), (4, 3)\}$.

Hemos de calcular $p(B/A)$.

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Como $B \subset A$, $A \cap B = B$, y $p(A \cap B) = \frac{2}{36}$.

Luego $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{2}{36} : \frac{6}{36} = \frac{1}{3}$.

- De una baraja de 40 cartas se extraen sucesivamente dos cartas. Hallar la probabilidad de que ambas sean reyes si:

a) La primera carta se devuelve a la baraja.

b) La primera carta no se devuelve a la baraja.

Solución

Llamemos A y B a los sucesos:

A: «Sale rey en la primera extracción.»

B: «Sale rey en la segunda extracción.»

Tenemos que hallar $p(B/A)$.

a) $p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

Como la carta se reemplaza, $p(B/A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$; por tanto,

$$p(A \cap B) = p(A)p(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

b) Si la carta obtenida en la primera extracción es un rey, quedarán 3 reyes en las 39 cartas restantes. Luego $p(B/A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$.

Por tanto, $p(A \cap B) = p(A)p(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$.

2 PROBABILIDAD COMPUESTA

Acabamos de ver en los ejemplos que el concepto de probabilidad condicionada se puede utilizar para calcular la probabilidad de uno de los sucesos y la probabilidad condicionada del otro mediante la fórmula

$$p(A \cap B) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B) \quad [1]$$

A la probabilidad de la intersección de varios sucesos se la llama *probabilidad compuesta*, y la fórmula [1] es la *ley de las probabilidades compuestas* para dos sucesos.

Esta ley se puede generalizar para un número cualquiera finito de sucesos. Así, para tres sucesos A, B y C, se tiene: $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B/A)p(C/A \cap B)$

En efecto: $p(A \cap B \cap C) = p[(A \cap B) \cap C] = p(A \cap B)p(C/A \cap B)$.

Y como $p(A \cap B) = p(A)p(B/A)$, resulta sustituyendo:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B/A)p(C/A \cap B)$$

Análogamente se justifica que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots p(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Este resultado es conocido también como el teorema de la multiplicación.

Ejemplo:

- Sea el experimento que consiste en extraer sucesivamente tres bolas de una caja que contiene cinco bolas rojas, tres blancas y dos negras. Hallar la probabilidad de que salgan en el orden roja, blanca y negra.

  Solución

  Sean A, B y C los sucesos:

  A: «Extraer bola roja en la primera extracción.»
  B: «Extraer bola blanca en la segunda extracción.»
  C: «Extraer bola negra en la tercera extracción.»

  Entonces: $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B/A)p(C/A \cap B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{24}$.

3 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

3.1. Hay ocasiones en que la realización de un suceso no afecta a la probabilidad de otro posterior.

Así, por ejemplo, al lanzar un dado dos veces, la obtención de un 3 en el primer lanzamiento no afecta a la posible obtención de un 4 en el segundo lanzamiento. En este caso diremos que los sucesos A y B:

A: «Obtener 3 en el primer lanzamiento»
B: «Obtener 4 en el segundo lanzamiento»
son *independientes*.

A continuación damos una definición más precisa de independencia de sucesos.

Definición

Sean A y B dos sucesos. Se dice que A es independiente de B cuando $p(A/B) = p(A)$ (supuesto $p(B) \neq 0$).

En el caso de que $p(A/B) \neq p(A)$, se dice que el suceso A *depende* del suceso B.

3.2. *Teorema.*

La condición necesaria y suficiente para que el suceso A sea independiente de B es que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ (supuesto $p(B) \neq 0$).

Condición necesaria. Si A es independiente de B, entonces $p(A/B) = p(A)$. Despejando $p(A \cap B)$ en $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ resulta:

$p(A \cap B) = p(A/B)p(B)$. Luego: $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Condición suficiente. Si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, con $p(B) \neq 0$, sustituyendo en la fórmula que nos da la definición de probabilidad condicionada:

$p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A)$. Luego A es independiente de B.

3.3. *Si A es independiente de B y* $p(A) \neq 0$, *entonces B es independiente de A.*

En efecto: si A es independiente de B, $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, y si, además, $p(A) \neq 0$, podemos despejar $p(B)$:

$p(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$, y este segundo miembro es la probabilidad de B condicionada a A.

$p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$; luego: $p(B/A) = p(B)$, es decir, B es independiente de A.

Vemos así que la independencia de sucesos tiene *carácter simétrico*, por lo que hablaremos siempre de *sucesos independientes.*

La relación $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ se suele utilizar como criterio de independencia de los sucesos A y B y se la conoce con el nombre de *regla del producto.*

3.4. *Si A y B son dos sucesos independientes, también son independientes A y* $\bar{B}$.

En efecto: $A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, igualdad que pone de manifiesto la figura 2.

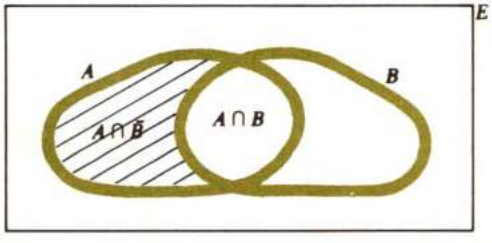
Como los sucesos $A \cap B$ y $A \cap \bar{B}$ son incompatibles (Fig. 2), se tiene:

$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] =$

$= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$

Luego:

$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$



(Fig. 2)

Como A y B son independientes:

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)[1 - p(B)] = p(A)p(\bar{B})$$

Es decir:

$p(A \cap \bar{B}) = p(A)p(\bar{B})$, lo que nos dice que A y $\bar{B}$ son sucesos independientes.

3.5. *Si A y B son sucesos independientes, también son independientes los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$, contrarios de A y B, respectivamente.*

Hemos de probar que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A})p(\bar{B})$.

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) \overset{①}{=} p(\overline{A \cup B}) \overset{②}{=} 1 - p(A \cup B) =$
$\overset{③}{=} 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) \overset{④}{=} 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B) =$
$\overset{⑤}{=} 1 - p(A) - p(B)[1 - p(A)] \overset{⑥}{=} p(\bar{A}) - p(B)p(\bar{A}) =$
$\overset{⑦}{=} p(\bar{A})[1 - p(B)] \overset{⑧}{=} p(\bar{A})p(\bar{B})$

Las igualdades anteriores se justifican del modo siguiente:

①, leyes de Morgan.

②, ⑥ y ⑧, probabilidades de sucesos contrarios.

③, probabilidades del suceso unión.

④, A y B son sucesos independientes por hipótesis.

⑤ y ⑦, sacar factor común.

3.6. *Si A y B son dos sucesos incompatibles, no imposibles, entonces A y B no pueden ser independientes.*

En efecto: A y B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cap B) = 0$

Entonces: $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0$, y como $p(A) \neq 0$, es claro que $p(A/B) \neq p(A)$.

4 EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA

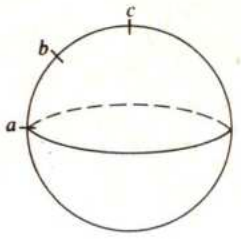
4.1. El concepto de independencia se puede generalizar a más de dos sucesos.

Tres sucesos A, B y C se dice que son independientes si se verifican las siguientes condiciones:

a) $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
b) $p(B \cap C) = p(B)p(C)$.
c) $p(A \cap C) = p(A)p(C)$.
d) $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$.

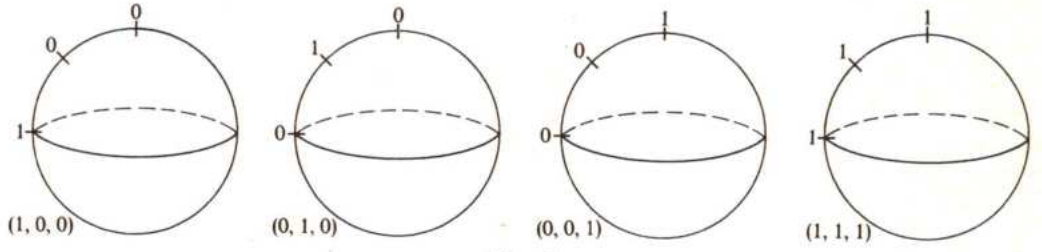
De aquí que si tres sucesos son independientes, *lo son dos a dos.*

La proposición recíproca *no* es cierta, como muestra el siguiente ejemplo de S. Bernstein. Tengamos en una urna cuatro bolas con determinadas marcas en las posiciones a, b, c (Fig. 3) y supongamos que la probabilidad de extraer una bola dada es la misma para todas, y por tanto, $\frac{1}{4}$.



(Fig. 3)

Consideremos los sucesos representados en la figura 4



(Fig. 4)

A: «Sale una bola con 1 en la posición a»; $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$

B: «Sale una bola con 1 en la posición b»; $B = \{(0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

C: «Sale una bola con 1 en la posición c»; $C = \{(0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

Los tres sucesos tienen la misma probabilidad $\frac{1}{2}$:

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{2}$$

Por otra parte, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{(1, 1, 1)\}$.

Y entonces:

$$p(A \cap B) = p(A \cap C) = p(B \cap C) = \frac{1}{4} \quad [1]$$

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \quad [2]$$

De [1] se deduce que se verifican las condiciones *a*), *b*) y *c*) de independencia.

Como $p(A)p(B)p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, resulta que $p(A \cap B \cap C) \neq p(A)p(B)p(C)$, de modo que los sucesos A, B y C son independientes dos a dos, pero no se cumple la condición *c*), por lo que A, B y C no son independientes.

4.2. En general, diremos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son independientes si la probabilidad de toda intersección formada con ellos es igual al producto de las probabilidades de los sucesos que entran en la intersección*, es decir, los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si la regla del producto $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) = p(A_1), p(A_2), \ldots, p(A_i)$ es válida para cualquier subconjunto de sucesos $i = 2, 3, \ldots, n$.

5 EXPERIENCIAS SUCESIVAS. ESPACIO PRODUCTO

Las nociones de dependencia e independencia se han referido hasta ahora a sucesos de un mismo espacio muestral, es decir, sucesos pertenecientes al mismo espacio de probabilidad (E, S, p).

Supongamos que tenemos dos experimentos ε_1 y ε_2 y asociados a ellos los espacios de probabilidad (E_1, S_1, p_1) y (E_2, S_2, p_2), respectivamente.

Designemos por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los sucesos elementales del primer espacio y por $B_1, B_2, \ldots, B_m$ los del segundo.

Definición

Se llama espacio producto cartesiano $E_1 \times E_2$ *al formado por* $m \times n$ *sucesos elementales de la forma* $A_i \cap B_j$

con $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$

Si en este espacio hay definida una ley de probabilidad p, tendremos un espacio probabilístico $(E_1 \times E_2, S, p)$.

Diremos que *los espacios de probabilidad* (E_1, S_1, p_1) *y* (E_2, S_2, p_2) *son independientes si se verifica*

$$p(A_i \cap B_j) = p_1(A_i)p_2(B_j)$$

También diremos que los experimentos ε_1 y ε_2 son independientes, lo que significa que los resultados del segundo experimento no estarán influidos por los que se hayan obtenido en el primero.

Si se suponen conocidas las probabilidades de los sucesos elementales de E_1 y E_2, podremos calcular las probabilidades de los sucesos elementales del espacio producto $E_1 \times E_2$ mediante la ley de las probabilidades compuestas, si no se trata de experimentos físicamente independientes:

$$p(A_i \cap B_j) = p(A_i)p(B_j/A_i)$$

o por la regla del producto si se trata de experimentos independientes:

$$p(A_i \cap B_j) = p(A_i)p(B_j)$$

Ejemplos:

- Se lanza una moneda tres veces al aire. Hallar la probabilidad de que salga la primera vez cara, la segunda cruz y la tercera cara.

  $p(\text{cara, cruz, cara}) = p(c, x, c) = p(\text{cara})p(\text{cruz})p(\text{cara}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$

- Se lanza un dado y una moneda. Hallar la probabilidad de que salga 3 y cara.

  Los espacios muestrales son $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E_2 = \{c, x\}$.

  El espacio producto es:

  $E_1 \times E_2 = \{(1, c), (1, x), (2, c), (2, x), (3, c), (3, x), (4, c), (4, x), (5, c), (5, x), (6, c), (6, x)\}$

  Como los experimentos son físicamente independientes:

$$p\{(3, c)\} = p\{(3)\}p\{(c)\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Nota: Se observa que aunque hemos utilizado la misma letra p en $p\{(3)\}$ y $p\{(c)\}$, se trata de probabilidades de espacios de probabilidad diferentes.

6 PROBLEMAS RESUELTOS

6.1. En un colegio hay 60 alumnos de COU. De ellos 40 estudian inglés, 24 estudian francés y 12, los dos idiomas.

Se elige al azar un alumno del curso, y si A y B son los sucesos:

A: «El alumno elegido estudia inglés».
B: «El alumno elegido estudia francés».

1) Determinar las probabilidades de los sucesos siguientes:

   a) A; b) B; c) $A \cap B$; d) $A \cup B$; e) $\overline{A \cup B}$.

2) Calcular las probabilidades condicionadas siguientes:

   a) $p(B/\text{A})$; b) $p(B/A \cup B)$; c) $p(A/B)$.

Solución

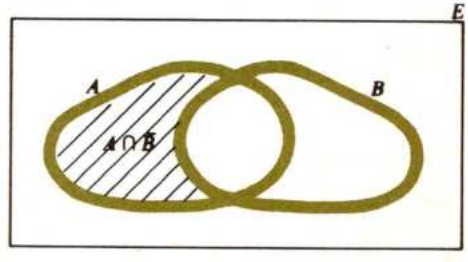
1) En la figura 5 se han representado los sucesos A y B y el rectángulo representa el universo de los 60 alumnos.

   Las probabilidades de los tres primeros sucesos se obtienen directamente:

   a) $p(A) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

   b) $p(B) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

   c) $p(A \cap B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$



(Fig. 5)

d) Para calcular la probabilidad de $A \cup B$ podemos seguir dos caminos:

d_1) Calculando el número de elementos de $A \cup B$, es decir, Card$(A \cup B)$.

Card$(A \cup B)$ = Card(A) + Card(B) − Card$(A \cap B)$.

Card$(A \cup B) = 40 + 24 - 12 = 52$

Entonces: $p(A \cup B) = \dfrac{52}{60} = \dfrac{13}{15}$

d_2) También podemos calcular $p(A \cup B)$ aplicando la fórmula

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

De este modo resulta:

$$p(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$$

e) Podemos calcular la probabilidad del suceso $\bar{A} \cup B$ a través del suceso contrario. El suceso contrario de $\bar{A} \cup B$ es

$\overline{(\bar{A} \cup B)} = A \cap \bar{B}$ por las leyes de Morgan.

$A \cap \bar{B}$ es el suceso de que el alumno elegido estudie inglés y no estudie francés. De este tipo de alumnos hay $40 - 12 = 28$, como se observa en la figura 5 (parte rayada). Por tanto, $p(A \cap \bar{B}) = \dfrac{28}{60} = \dfrac{7}{15}$.

2) Apliquemos la fórmula de la probabilidad condicionada

a) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{1/5}{2/3} = \dfrac{3}{10}$

b) Teniendo en cuenta que $B \cap (A \cup B) = B$ (ley de simplificación), resulta:

$$p(B/A \cup B) = \frac{p[B \cap (A \cup B)]}{p(A \cup B)} = \frac{p(B)}{p(A \cup B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{13}{15}} = \frac{6}{13}$$

c) $p(A/\bar{B}) = \dfrac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \dfrac{\frac{7}{15}}{1 - p(B)} = \dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{7}{9}$

6.2. El Caballero de Meré propuso a Pascal el siguiente problema:

¿Cuál es la probabilidad p de que al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un 6 doble? ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que $p = \dfrac{1}{2}$?

Solución

Para cada lanzamiento hay 36 casos posibles y uno solo favorable.

Hay 36 casos posibles porque por cada resultado en el primer dado hay seis en el segundo; por tanto, los casos favorables son $6 \times 6 = 36$.

Entonces, la probabilidad de que no salga el 6 doble en cada lanzamiento es $\frac{35}{36}$, y la probabilidad de que no salga el 6 doble en los n lanzamientos es $\left(\frac{35}{36}\right)^n$. Por consiguiente, la probabilidad de obtener al menos un 6 doble en los n lanzamientos es $p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$.

El número de partidas que hay que jugar para $p = \frac{1}{2}$ viene dado por el valor de n en:

$$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

$$n \log \frac{35}{36} = \log \frac{1}{2} \Rightarrow n(\log 35 - \log 36) = -\log 2;\ n = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24.605;$$

es decir, $n = 25$.

6.3. El Caballero de Meré propuso también el siguiente problema:

Determinar si es o no ventajoso jugar apostando cantidades iguales a que por lo menos aparece un 6 en cuatro tiradas de un dado correcto.

Solución

Designemos por A y B los sucesos siguientes:

A: «Obtener al menos un 6 en las 4 tiradas.»

$\bar{A}$: «No obtener ningún 6 en las 4 tiradas.»

La probabilidad de no obtener 6 en la primera tirada es $\frac{5}{6}$.

La probabilidad de no obtener 6 en las dos primeras tiradas es $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

La probabilidad de no obtener 6 en las cuatro primeras tiradas es $p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Entonces:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1.296} = \frac{671}{1.296} \simeq 0,5177$$

Como la probabilidad $p(A) > \frac{1}{2}$, resulta ventajoso apostar la misma cantidad de dinero.

EJERCICIOS FINALES

1. Se sabe que $p(A) = \frac{1}{3}$; $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Hallar:

   a) $p(A \cup B)$ b) $p(A/B)$ c) $p(B/A)$ d) $p(\bar{B})$

   e) $p(\overline{A \cup B})$ f) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$ g) $p(\bar{A}/\bar{B})$ h) $p(\bar{B}/\bar{A})$

2. De dos sucesos de un mismo espacio muestral se sabe que $p(A) = \frac{1}{4}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ y $p(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

   Hallar:

   a) $p(\bar{A})$ c) $p(A \cap B)$ e) $p(B/A)$ g) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

   b) $p(\bar{B})$ d) $p(A/B)$ f) $p(\overline{A \cup B})$ h) $p(\bar{A}/\bar{B})$

3. En el experimento de lanzar un dado se consideran los siguientes sucesos:

   a) A: «Obtener un número mayor que 4.»

   b) B: «Obtener un múltiplo de 3.»

   Hallar:

   a) $p(A)$; b) $p(B)$; c) $p(A \cap B)$; d) $p(A \cup B)$; e) $p(A/B)$; f) $p(B/A)$

4. De dos sucesos A y B se sabe que $p(B) = \frac{1}{4}$; $p(A \cup B) = \frac{1}{3}$.

   a) Hallar $p(A)$, si A y B son sucesos incompatibles.

   b) Hallar $p(A)$, si A y B son sucesos independientes.

5. Las 40 cartas de una baraja española se reparten en partes iguales entre cuatro personas A, B, C y D.

   Hallar la probabilidad de que B tenga dos reyes si se sabe que A no tiene reyes.

6. Se tienen nueve tarjetas, y cada una lleva escrito un dígito del 1 al 9. Se eligen al azar dos tarjetas y la suma de los dígitos escritos en ellas da par. ¿Cuál es la probabilidad de que las tarjetas elegidas lleven escritos números impares?

7. Se lanzan dos dados. Si la suma de los puntos de las caras superiores es 5, hallar la probabilidad de que en alguno de los dados salga 2.

8. Una caja contiene cuatro bolas blancas y dos negras. Se saca una bola y a continuación (sin devolver la primera a la caja) se extrae otra.

   Considerados los sucesos A: «La primera bola extraída es blanca.»
   B: «La segunda bola extraída es blanca.»

   a) Hallar $p(A)$ y $p(B/A)$.

   b) ¿Son A y B independientes?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

9. Un dado se lanza dos veces. Hallar la probabilidad de obtener 4, 5 ó 6 en el primer lanzamiento y 1, 2, 3 ó 4 en el segundo.

10. Si se lanza un dado, ¿cuál será la probabilidad de que salga 6 sabiendo que caerá 4 o más?

11. Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda y un dado.
Si A es el suceso de que salga cara la moneda y B es el suceso de obtener 3 ó 6 con el dado, hallar:

a) $p(\bar{A})$; b) $p(\bar{B})$; c) $p(A \cap B)$; d) $p(A \cap \bar{B})$

12. Un dado está lastrado de tal modo que la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número (por ejemplo, la probabilidad de que salga 4 es el doble de la probabilidad de que salga 2).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga el 3 si se sabe que salió número impar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga número par si se sabe que salió un número mayor que 3?

13. Un colegio tiene dos tercios de niños y un tercio de niñas. Un décimo de los niños han ido al extranjero. Se elige un alumno del colegio al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño que fue al extranjero?

14. Se sacan sucesivamente tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean del mismo palo?

15. Se sacan sucesivamente tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que cada una sea de un palo diferente?

16. Una urna contiene ocho bolas rojas y cuatro bolas blancas. Se sacan tres bolas de la urna, una tras otra. Hallar la probabilidad de que las dos primeras sean rojas y la tercera, blanca.

17. Se le dan a un jugador cuatro cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro sean oros?

18. En un taller el 25 por 100 de los trabajadores son mecánicos, el 15 por 100 son electricistas y el 10 por 100 tienen las dos especialidades.

Se selecciona un trabajador del taller al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado sea mecánico o electricista?

b) Si se sabe que el trabajador seleccionado es mecánico, ¿cuál es la probabilidad de que sea electricista?

c) Si se sabe que el trabajador seleccionado es electricista, ¿cuál es la probabilidad de que sea mecánico?

19. De una baraja de 40 cartas se sacan sucesivamente dos al azar. Hallar la probabilidad de que la primera sea caballo y la segunda, rey.

20. ¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco sabiendo que sólo pueden lanzarse tres torpedos y que la probabilidad de hacer blanco con un torpedo es 0,2?

BERNSTEIN (Sergej)

Matemático ruso (1880-1968). Fue profesor del Instituto de Ciencias Matemáticas de Járkov entre 1920 y 1923 y profesor de la Universidad de Leningrado de 1934 a 1941. Ha publicado diversos estudios sobre la teoría de probabilidades y la resolución de ecuaciones diferenciales.

PASCAL (Blaise)

Matemático y físico francés (1623-1662). En Matemática, su obra más original (en colaboración con Fermat) fue su teoría de las probabilidades.

TEMA 29
TEOREMA DE BAYES Y LEY BINOMIAL

Las fórmulas de Bayes, que se estudian en este tema, nos dan la probabilidad de que, presentado un suceso, se deba a una hipótesis o suceso dado.

El primer teorema que aparece en el tema se puede considerar como un lema del teorema de Bayes propiamente dicho. Después de estudiar la fórmula binomial de Bernoulli, se aplica la teoría estudiada a la resolución de varios problemas.

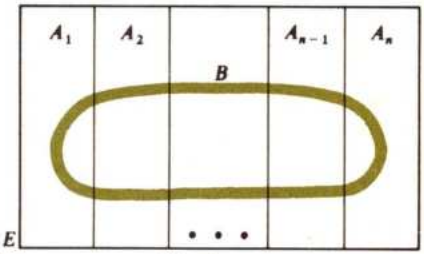
1 TEOREMA Y FÓRMULAS DE BAYES

1.1. *Teorema.*
Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos tales que $p(A_i) \neq 0; i = 1, 2, \ldots, n$, es decir:

a) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$ (espacio muestral). b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

Si B es un suceso cualquiera, $B \subset E$, se verifica:

$$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \cdots + p(A_n)p(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B/A_i)$$



(Fig. 1)

Demostración

$$B = B \cap E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n) \text{ (Fig. 1).}$$

Y como en el último miembro hay una unión de sucesos incompatibles, se puede aplicar el teorema de las probabilidades totales para sucesos incompatibles:

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n)$$

Y por la definición de probabilidad condicionada:

$$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \cdots + p(A_n)p(B/A_n) \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B/A_i)$$

Ejemplo:

- En un colegio se imparten sólo los idiomas inglés y francés. El 80 por 100 de los alumnos estudian inglés y el resto, francés. El 30 por 100 de los alumnos que estudian inglés son socios del club musical del colegio, y de los que estudian francés son socios de dicho club el 40 por 100. Se elige un alumno del colegio al azar. Hallar la probabilidad de que pertenezca al club musical.

Solución

Consideremos como espacio muestral E el conjunto de alumnos del colegio.

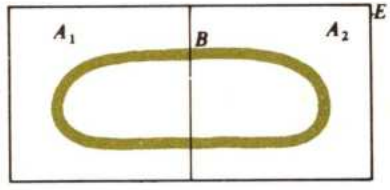
Sean los sucesos:

A_1 = {alumnos que estudian inglés}
A_2 = {alumnos que estudian francés}
B = {alumnos socios del club musical}

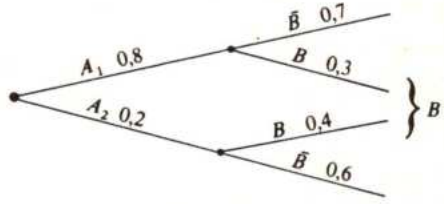
Como $\{A_1, A_2\}$ es un sistema completo de sucesos (Fig. 2), podemos calcular $p(B)$ por la fórmula obtenida en el teorema anterior.

$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2)$

$p(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}24 + 0{,}08 = 0{,}32$



(Fig. 2)



(Fig. 3)

En el árbol de la figura 3 queda representada la situación planteada. A partir de este árbol se puede obtener también el resultado anterior.

La probabilidad de que un camino determinado del árbol suceda, es el producto de las probabilidades de cada rama del camino.

Así la probabilidad de que el alumno elegido estudie inglés y sea socio del club musical es $0{,}8 \cdot 0{,}3$. Ahora bien, como hay dos caminos mutuamente exclusivos que conducen a un estudiante del club musical, la suma de las probabilidades de estos caminos es la probabilidad buscada.

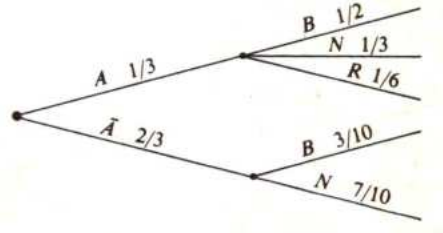
Ejercicio:

1. Se tienen las urnas U_1 y U_2.
   La urna U_1 contiene seis bolas blancas, cuatro negras y dos rojas, y
   La urna U_2 contiene tres bolas blancas y siete negras.
   Se lanza un dado al aire, y si aparece un número múltiplo de 3 se saca una bola de la urna U_1; en caso contrario, se saca la bola de la urna U_2. Hallar la probabilidad de que:

   a) salga una bola blanca,
   b) salga una bola negra,
   c) salga una bola roja.

   Indicación: Tener en cuenta el diagrama de la figura 4 y los siguientes sucesos:

   B: Sale bola blanca.
   N: Sale bola negra.
   R: Sale bola roja.
   A: Sale múltiplo de 3.

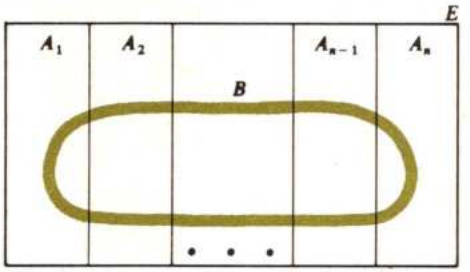


(Fig. 4)

1.2. *Fórmulas de Bayes.*

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto de n sucesos incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$ (espacio muestral), es decir, un sistema completo de sucesos.

Supongamos que $p(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y sea B un suceso cualquiera del que conocemos las probabilidades de los sucesos condicionados B/A_i (Fig. 5).



(Fig. 5)

En estas condiciones se pueden calcular las probabilidades de los sucesos condicionados A_1/B, A_2/B, A_i/B, $\ldots$, A_n/B mediante la fórmula siguiente, conocida por *fórmula de Bayes*:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)p(B/A_i)}{p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \cdots + p(A_i)p(B/A_i) + \cdots + p(A_n)p(B/A_n)}$$

Es decir:

$$\boxed{p(A_i/B) = \frac{p(A_i)p(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j)p(B/A_j)}}$$

Demostración

Según el teorema **1.1** anterior, $p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \cdots + p(A_n)p(B/A_n)$, y por definición: $p(A_i/B) = \dfrac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$ [1] y, además, $p(A_i \cap B) = p(A_i)p(B/A_i)$. Sustituyendo en [1] $p(B)$ y $p(A_i \cap B)$ por sus valores, resulta:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)p(B/A_i)}{p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \cdots + p(A_i)p(B/A_i) + p(A_n)p(B/A_n)}$$

La fórmula nos da las probabilidades del suceso A_i *a posteriori*, es decir, la probabilidad de que presentado el suceso B, se deba a la hipótesis o suceso A_i.

En la fórmula de Bayes aparecen las probabilidades $p(A_i)$, que no son conocidas en muchas ocasiones, con lo cual hay que asignar probabilidades arbitrarias, y, por tanto, subjetivas, a estos sucesos A_i. En muchas ocasiones se supone que dichas probabilidades son iguales cuando no hay razones para pensar lo contrario, pero para que sea correcta la aplicación del teorema de Bayes se han de conocer las probabilidades que entran en la fórmula.

Ejemplo:

- En una clase de COU el 8 por 100 de los chicos y el 2 por 100 de las chicas han cumplido 19 años. El 60 por 100 de los alumnos de la clase son mujeres.

  Se elige al azar un estudiante de la clase y resultó que tenía 19 años cumplidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea mujer?

  Solución

  Sean:

  A: «El estudiante tiene 19 años cumplidos.»
  B: «El estudiante es una mujer.»
  C: «El estudiante es varón.»

  Tenemos que calcular $p(B/A)$:

$$p(B/A) = \frac{p(B)p(A/B)}{p(B)p(A/B) + p(C)p(A/C)}$$

  Según el enunciado:

$$p(B) = \frac{60}{100} = 0{,}6 \quad ; \quad p(A/C) = \frac{8}{100} = 0{,}03$$

$$p(C) = \frac{40}{100} = 0{,}4 \quad ; \quad p(A/B) = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

  Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior, se tiene:

$$p(B/A) = \frac{0{,}60 \cdot 0{,}02}{0{,}60 \cdot 0{,}02 + 0{,}40 \cdot 0{,}08} = \frac{0{,}012}{0{,}012 + 0{,}032} = \frac{0{,}012}{0{,}044} = \frac{12}{44} = \frac{3}{11} \simeq 0{,}2727$$

Ejercicio:

2. En la ejecutiva de un partido político el 70 por 100 son partidarios de una línea moderada y el resto, de una línea radical. El 60 por 100 de los moderados y el 10 por 100 de los radicales tienen más de 40 años.

   Elegido un miembro de la ejecutiva al azar, resulta que tenía más de 40 años. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un radical?

   Indicación:

   Considerar los sucesos incompatibles B y C.

   B: «El miembro elegido es un radical.»
   C: «El miembro elegido es un moderado.»
   $\{B, C\}$ es un sistema completo de sucesos.

   Sea ahora el suceso A: «El miembro elegido tiene más de 40 años.»

   Calcular $p(B/A)$ aplicando la fórmula de Bayes como en el ejemplo anterior.

2 LEY BINOMIAL: FÓRMULA DE BERNOULLI

2.1. Consideremos un experimento aleatorio que se puede repetir en condiciones idénticas un determinado número n de veces.

Sea A un suceso relativo a dicho experimento y $\bar{A}$ el suceso contrario.

Si la experiencia se repite en igualdad de condiciones, es evidente que la probabilidad de que el suceso A se presente en una cualquiera de las repeticiones o pruebas del experimento es independiente del número de veces que A pueda haberse presentado o no en las demás. Es decir, si la probabilidad de que se presente el suceso A es p la primera vez que se realiza el experimento, esta probabilidad no variará a lo largo de todas las repeticiones de dicho experimento. Lo mismo ocurrirá con el suceso $\bar{A}$. La probabilidad q de que ocurra el suceso $\bar{A}$ es siempre la misma en todas las repeticiones.

Así, si lanzamos un dado diez veces, y A es el suceso que consiste en salir par, la probabilidad de A es $\frac{1}{2}$ a lo largo de todos y cada uno de los diez lanzamientos.

Estos experimentos aleatorios de n pruebas para los que se verifica:

a) en cada prueba se consideran dos sucesos incompatibles A y $\bar{A}$,

b) el resultado de cada prueba es independiente de los resultados anteriores,

c) la probabilidad de que ocurra A no varía de una prueba a otra

se llaman experimentos de Bernoulli.

Sea el suceso que consiste en que en n repeticiones del experimento aleatorio aparezca A, r veces y $\bar{A}$, $(n - r)$ veces.

Este suceso se puede considerar como la unión de todos los sucesos elementales de la forma $A\,A\,\bar{A}\,A\,\bar{A}\,\ldots\,\bar{A}\,A\,A$ [1], donde A aparece r veces y $\bar{A}$ $(n - r)$ veces.

La probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales es $p^r q^{n-r}$, puesto que p y q son las probabilidades de que aparezcan A y $\bar{A}$, respectivamente.

El problema de saber cuántos sucesos elementales hay de la forma indicada equivale a averiguar cuántas sucesiones diferentes como la [1] se pueden escribir. Este número coincide con el número de subconjuntos de r elementos en un conjunto de n elementos. Aquí los elementos son las n pruebas numeradas. Por consiguiente, el número de ordenaciones es $C_n^r = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$.

Es decir, la probabilidad de que A se presente r veces en n pruebas es:

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

Si representamos por $p(r, n, p)$ la probabilidad de que en n pruebas se obtenga r veces A siendo p la probabilidad de A y q la probabilidad de $\bar{A}$, entonces

$$p(r, n, p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad [2]$$

Ejemplos:

- La probabilidad de que salgan tres caras al lanzar una moneda ocho veces es:

$$p\left(3, 8, \frac{1}{2}\right) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 56 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{56}{256} = 0{,}2187$$

- La probabilidad de que al lanzar un dado cuatro veces salga el 1 tres veces es:

$$p\left(3, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{1.296} \simeq 0{,}0154$$

ya que $p(A) = \dfrac{1}{6} = p$ y $p(\bar{A}) = \dfrac{5}{6} = q$.

2.2. La probabilidad de que el suceso A aparezca un número de veces que sea mayor o igual que r_1 y menor o igual que r_2 vendrá dada por la suma:

$$\binom{n}{r_1}p^{r_1}q^{n-r_1} + \binom{n}{r_1+1}p^{r_1+1}q^{n-r_1-1} + \binom{n}{r_1+2}p^{r_1+2}q^{n-r_1-2} + \cdots +$$
$$+ \binom{n}{r_2-1}p^{r_2-1}q^{n-r_2+1} + \binom{n}{r_2}p^{r_2}q^{n-r_2} = \sum_{r=r_1}^{r_2}\binom{n}{r}p^r q^{n-r} \quad [3],$$

ya que los sumandos son probabilidades de sucesos incompatibles.

Considerando en particular el valor $r_1 = 0$ y $r_2 = n$, tendremos la probabilidad del suceso seguro. En efecto, por el binomio de Newton se tiene la expresión:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r} = (p+q)^n = 1 \quad [4]$$

Por esta razón, la ley de probabilidades en un experimento de Bernoulli se llama *ley binomial.*

Ejemplos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia con seis hijos sean dos hijos varones, suponiendo que las probabilidades de que nazca niño o niña sean iguales?

  Solución

  Los descendientes de una pareja constituyen un ejemplo de experimento de Bernoulli porque:

  a) En cada nacimiento son posibles dos resultados incompatibles: varón (A) y hembra ($\bar{A}$).
  b) El resultado de un parto es independiente de los resultados en los partos anteriores.
  c) La probabilidad de A no varía. Si suponemos que la probabilidad de nacimiento de varones es igual a la de hembras, se tiene $p(A) = \dfrac{1}{2}$ y $p(\bar{A}) = \dfrac{1}{2}$.

  Por consiguiente, la probabilidad p pedida es:

$$p = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6!}{4!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64}$$

• ¿Cuál es la probabilidad de que una familia de seis hijos tenga como máximo cuatro hijos varones?

Solución

Aplicando la fórmula [3] resulta:

$$\sum_{r=0}^{4}\binom{6}{r}p^4q^{6-r}$$

Si suponemos, como en el ejemplo anterior, que $p = q = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{r=0}^{4}\binom{6}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r} = \left(\frac{1}{2}\right)^6\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right] = 57\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{57}{64}$$

• Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado seis veces salga el 3 al menos cuatro veces.

Solución

Aplicando la fórmula [3]:

$$\sum_{r=4}^{6}\binom{6}{r}p^rq^{6-r}$$

Como $p(A) = \frac{1}{6} = p$ y $p(\bar{A}) = \frac{5}{6} = q$, resulta que la probabilidad pedida es:

$$\binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \left(\frac{1}{6}\right)^4\left[\binom{6}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{1.296}\left[15\cdot\frac{25}{36}+6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{36}\right] = \frac{1}{1.296}\cdot\frac{406}{36} = 0{,}00870$$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que en seis lanzamientos de un mismo dado se obtenga un 5 exactamente dos veces?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda diez veces
   a) se obtenga cara exactamente seis veces?
   b) se obtenga cara al menos seis veces?

3 PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. Se lanzan dos dados diez veces. Un éxito (A) corresponde a obtener una suma de 7 puntos. Calcular:

a) La probabilidad de obtener tres éxitos en las diez pruebas.
b) La probabilidad de obtener cinco o seis éxitos en las diez pruebas.

Solución

a) La suma de 7 se puede obtener con dos dados en las formas siguientes: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (6, 1), (5, 2), (4, 3).

Luego $p(A) = p = \frac{6}{36}$, ya que son 36 los casos posibles en cada prueba; por consiguiente:

$$p\left(3,\ 10\ \frac{1}{6}\right) = \binom{10}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

b) La probabilidad de obtener cinco o seis éxitos es igual a la probabilidad de obtener cinco éxitos más la probabilidad de obtener seis éxitos, es decir:

$$\binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{10}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4\left[\binom{10}{5}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{10}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4\right] =$$

$$= \frac{1}{1.296}\left[252 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3.125}{7.776} + 210 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1.296}\right] \simeq 0{,}015$$

3.2. Un taller tiene distribuidos los coches en tres naves.

En la nave A hay 12 coches, de los cuales 4 están averiados; en la B hay 3 coches averiados y otros 3 sin averiar, y en la C hay 8 coches, de los cuales hay 3 averiados. Se elige una nave al azar y se saca un coche. ¿Cuál es la probabilidad de que esté averiado?

Solución

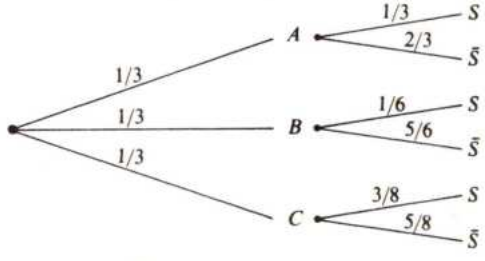
Consideremos los sucesos:

A: «Es elegida la nave A.»
B: «Es elegida la nave B.»
C: «Es elegida la nave C.»
S: «El coche elegido está averiado.»
$\bar{S}$: «El coche elegido no está averiado»

Tenemos que calcular $p(S)$. Como A, B y C son sucesos mutuamente excluyentes, los sucesos $A \cap C$, $B \cap S$ y $C \cap S$ también lo serán.

Entonces: $p(S) = p[S \cap (A \cup B \cup C)] = p[(S \cap A) \cup (S \cap B) \cup (S \cap C)] =$
$= p(S \cap A) + p(S \cap B) + p(S \cap C)$

En el árbol de la figura 6 se pueden calcular estas últimas probabilidades multiplicando las probabilidades de cada rama del camino seguido:



(Fig. 6)

$$p(A \cap S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p(B \cap S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$p(C \cap S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{24}$$

Por tanto, $p(S) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{3}{24} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24} \simeq 0{,}2916$.

3.3. Se han lanzado unos dados y se han obtenido 4 puntos. Hallar la probabilidad de que se haya jugado con dos dados.

Solución

Llamemos H_i al suceso (hipótesis) de que se haya jugado con i dados, y sea S el suceso de salir 4 puntos. Queremos hallar $p(H_2/S)$, suponiendo que $p(H_i) = \frac{1}{4}$.

Veamos el valor de las probabilidades $p(S/H_i)$

	H_1	H_2	H_3	H_4
Número de dados	1	2	3	4

Hay una forma de obtener 4 al lanzar un dado: H_1 $\{4$

Hay tres formas de obtener 4 al lanzar dos dados: H_2 $\begin{cases} 2+2 \\ 1+3 \\ 3+1 \end{cases}$

Hay tres formas de obtener 4 al lanzar tres dados: H_3 $\begin{cases} 1+1+2 \\ 1+2+1 \\ 2+1+1 \end{cases}$

Hay una forma de obtener 4 al lanzar cuatro dados: H_4 $\{1+1+1+1$

Entonces las probabilidades $p(S/H_i)$ son:

$$p(S/H_1) = \frac{1}{6};\ p(S/H_2) = \frac{3}{6^2};\ p(S/H_3) = \frac{3}{6^3};\ p(S/H_4) = \frac{1}{.6^4}$$

Aplicando la fórmula de Bayes se tiene:

$$p(H_2/S) = \frac{p(H_2)p(S/H_2)}{\sum_{i=1}^{3} p(H_i)p(S/H_i)} =$$

$$= \frac{p(H_2)p(S/H_2)}{p(H_1)p(S/H_1) + p(H_2)p(S/H_2) + p(H_3)p(S/H_3) + p(H_4)p(S/H_4)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6^2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\left[1 + \frac{3}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{1}{6^3}\right]} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{343}{216}} = \frac{1}{2} : \frac{343}{216} = \frac{108}{343}$$

$$p(H_2/S) = \frac{108}{343} \simeq 0{,}3148$$

3.4. Se tienen cuatro cajas que contienen 10 tornillos, unos buenos y otros defectuosos.

a) Una caja tiene 6 tornillos buenos y 4 defectuosos.
b) Dos cajas tienen 5 tornillos buenos y 5 defectuosos.
c) Una caja tiene 2 tornillos buenos y 8 defectuosos.

Se elige una caja al azar y se extraen 3 tornillos, resultando que 2 son buenos y 1 defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contenga 5 tornillos buenos y 5 defectuosos?

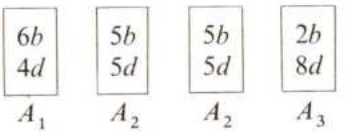
Solución

Llamemos A_1, A_2, A_3 y S a los sucesos:

A_1: «La caja elegida contiene 6 tornillos buenos y 4 defectuosos.»
A_2: «La caja elegida contiene 5 tornillos buenos y 5 defectuosos.»
A_3: «La caja elegida contiene 2 tornillos buenos y 8 defectuosos.»
S: «Al extraer 3 tornillos de la caja resultan 2 buenos y 1 defectuoso.»

Hemos de hallar $p(A_2/S)$.

Admitimos que la probabilidad de ser elegida una caja es la misma cualquiera que ésta sea:



Entonces:

$$p(A_1) = \frac{1}{4};\ p(A_2) = \frac{2}{4};\ p(A_3) = \frac{1}{4}$$

Por otra parte:

$$p(S/A_1) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{15 \cdot 4}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$p(S/A_2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{10 \cdot 5}{120} = \frac{5}{12}$$

$$p(S/A_3) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1 \cdot 8}{120} = \frac{1}{15}$$

Aplicando la fórmula de Bayes se tiene:

$$p(A_2/S) = \frac{p(A_2)p(S/A_2)}{p(A_1)p(S/A_1) + p(A_2)p(S/A_2) + p(A_3)p(S/A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{15}} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{15}\right]} = \frac{25}{42} = 0{,}5952$$

EJERCICIOS FINALES

1. Los 120 alumnos del curso de orientación universitaria (COU) de un centro se distribuyen por clases como se indica en la siguiente tabla:

	Número de alumnos	Estudian inglés	Estudian francés
COU-A	40	30	10
COU-B	35	15	20
COU-C	25	20	5
COU-D	20	20	0

Elegido un alumno al azar, resultó que estudiaba inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea de COU-A?

2. Una urna A contiene 3 bolas rojas y una blanca; otra urna B contiene 4 bolas rojas y 2 blancas, y una tercera C contiene una bola roja y 2 blancas. Si se extrae una bola de una de ellas y se comprueba que es roja, hallar la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

3. Se tienen dos cajas C_1 y C_2 con piezas fabricadas.

La caja C_1 contiene el 1 por 100 de piezas defectuosas y la caja C_2 contiene un 5 por 100 de piezas defectuosas. Se elige al azar una de las cajas y de la caja elegida se extrae una pieza. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes:

A: «La pieza extraída es buena.»

B: «La caja elegida es C_1, sabiendo que la pieza extraída es buena.»

4. En una clase, el 20 por 100 de los chicos y el 5 por 100 de las chicas juegan al tenis. El 60 por 100 de los alumnos de la clase son chicos. Se eligió al azar un estudiante de la clase y resultó ser de los que jugaban al tenis. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante elegido sea chico?

5. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga dos hijos varones? (Se supone que las probabilidades de que nazca niño o niña son iguales.)

6. Se lanzan varios dados y se obtienen 3 puntos. Hallar la probabilidad de que se haya jugado con 3 dados.

7. Se tienen 3 cajas con 8 tornillos cada una, unos buenos y otros defectuosos. Una caja contiene 5 tornillos buenos y 3 defectuosos, otra caja tiene 6 tornillos buenos y 2 defectuosos y la tercera caja tiene 2 tornillos buenos y 6 defectuosos. Se elige una caja al azar y se extraen 3 tornillos, resultando 2 buenos y 1 defectuoso.

Hallar la probabilidad de que la caja elegida haya sido la que contiene 5 tornillos buenos y 3 defectuosos.

8. Un estudio de mercado hecho por una fábrica de automóviles de la marca X muestra que sobre 100 personas que desean cambiar de coche en el año, 30 poseen un coche de la marca X y 40 desean cambiar de marca. Sobre 100 personas que poseen un coche de la marca X, 40 desean cambiar de marca. Sobre 100 personas que no poseen coche de la marca X, 15 desean comprar un coche de dicha marca.

Calcular:

a) La probabilidad de que una persona que desea cambiar de coche compre uno de la marca X.

b) La probabilidad de que una persona que acaba de comprar un coche de la marca X lo haya cambiado por un coche de marca diferente.

Indicación:

Considerar los sucesos:

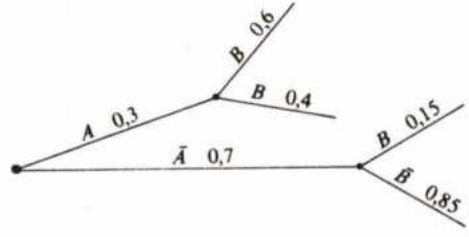
A: «La persona posee ya un coche de la marca X.»

B: «La persona compra un coche de la marca X.»

Del enunciado del problema se deducen las probabilidades siguientes:

$$p(A) = 0{,}3;\ p(B/A) = 0{,}6;\ p(B/\bar{A}) = 0{,}15$$

Teniendo en cuenta que $B = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ y que los sucesos $B \cap A$ y $B \cap \bar{A}$ son incompatibles, como se indica en el árbol siguiente, calcular $p(B)$ y $p(\bar{A}/B)$.



BAYES (Thomas)

Matemático británico (1702-1761). En 1763 se publicó postumamente una memoria en la que Bayes abordaba el problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados. En esta memoria se enunciaba el teorema que lleva su nombre.

BERNOULLI (Jakob)

Matemático suizo (1654-1705). Basándose en la obra de Leibniz *Acta Eroditorum*, donde exponía el cálculo infinitesimal, resolvió, junto con su hermano Johann, numerosos problemas planteados anteriormente. Su obra póstuma, a la que dedicó veinte años de estudios, es *Ars conjectandi (El arte de pronosticar)*, 1717, que constituye el primer tratado importante acerca de probabilidades.

©1981 by SANTILLANA, S. A.
Elfo, 32 - Madrid-27.
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España en los
Talleres Gráficos Mateu Cromo, S. A.
Ctra. de Pinto a Fuenlabrada, s/n. Pinto (Madrid)
ISBN: 84-294-1886-5
Depósito Legal: M. 6.958-1983

COU

santillana